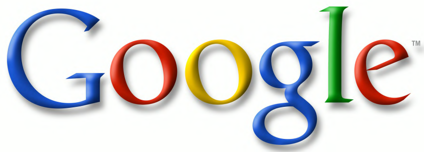
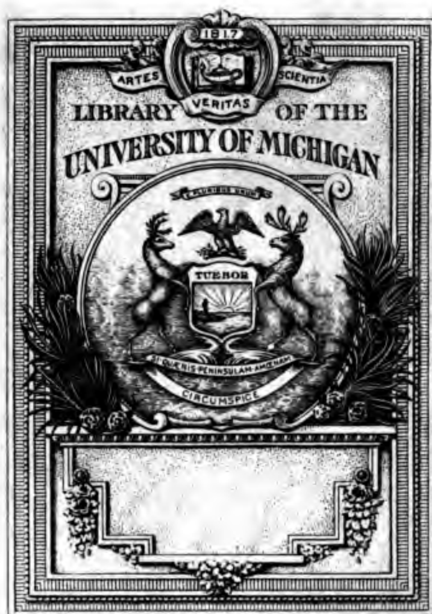
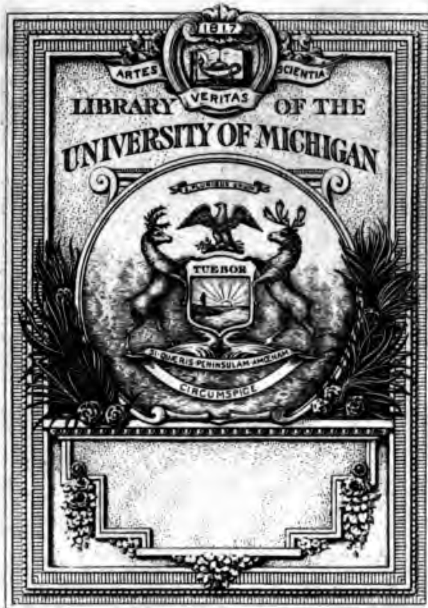





1817
ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE



1817
ARTES
SCIENTIA
VERITAS
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE

PRÆLECTIONES
PHYSICO-MATHEMATICÆ
CANTABRIGIÆ
In Scholis Publicis Habitæ.

QUIBUS

Philosophia Illustrissimi *NEWTONI Mathematica* Explicatius traditur, & facilius demonstratur:

COMETOGRAPHIA etiam HALLEIANA Commentariolo illustratur.

A *GULIELMO WHISTON*, A.M.
Et Matheseos Professore *Lucasiano*.

In Usum Juventutis Academicæ.

CANTABRIGIÆ,

Typis ACADEMICIS.

LONDINI, Impensis BENJ. TOOKE Bibliopolæ, juxta Medii Templi Portam, in vico vulgo vocato *Fleet-street*. A.D. M.DCC.X.

Philoſophia Mathematica.

PRÆLECTIO I.

ABsolutis olim pure Aſtronomicis, ad Operis noſtri partem alteram, *Philoſophiam* nempe Cl. Newtoni *Mathematicam* accedendum. In animo enim eſt Viri iſtius longe Maximi veſtigia premere, & præcipua ejuſdem nobiliſſimaque inventa Philoſophica, faciliori methodo exponere; ut ita tandem Philoſophia Newtoni plane divina pluribus, & vel in matheſi mediocriter verſatis innoteſcat; nec intra privatos ſummorum Geometrarum parietes amplius deliteſcat. Prius autem quam quiſquam egregia hæc & prorſus admiranda Philoſophiæ Naturalis theoremata aggrediatur, præter aliqualem Geometriæ, Arithmeticæ & Aſtronomiæ notitiam, neceſſarium eſt omnino ut cum veras *Motuum leges*, tum imprimis curvarum linearum quas *Sectiones Conicas* appellamus, naturas & primarias proprietates non ignoret. Viſum eſt ergo in eorum gratiam qui Prima tantum Geometriæ, Arithmeticæ & Aſtronomiæ Elementa perlegerunt, tam *Conicas Sectiones*, quam nuper demonſtratas *Motuum leges* paucis attingere atque illuſtrare; ne forte quiſpiam harum rerum penitus ignarus in Cl. Newtoni inventis intelligendis fruſtra laboret. Quod enim ad primas motuum & colliſionum leges attinet, in iis ſtabiliendis tam miſeris erravit modis Carteſius, falſaſque reflexionum Regulas orbi tam audacter tradidit, ut præjudiciis inde exortis tollendis vacare operæ pretium haud immerito videatur. Quod vero *Sectiones Conicas* ſpectat, Pauci adeo ex iis, inferioris nimirum ſubſellii Mathematicis, in quorum gratiam provinciam hanc ſuſcepi, earum indolem aut

proprietates capiunt, ut nisi hisce subvenire sit animus in cæteris laboriose tradendis operam plerumque atque oleum sim omnino perditurus. Etenim Cum Cl. Newtonus in eo totus sit, ut omnes Systematis nostri Planetas atque Cometas in aliqua sectionum conicarum moveri demonstret, perquam jucundum, quin & admodum necessarium erit curvarum harum generationes atque naturas contemplari. paululum atque prælibare. Ut ergo, missâ aliâ præfandi circuitione, Elementa Conica paucis explicare, & ob oculos, omissis tamen hic loci eorundem demonstrationibus, ponere valeam, nonnulla huc spectantia e conicorum scriptoribus, præsertim vero è Clarissimo D. De la Hire mutuò accipere, & pro demonstratis hic loco assumere, non pigebit. Quanquam autem curvæ istæ lineæ per meras in plano delineationes & constructiones, uti fiet inferius, exhiberi possint, tamen quia Geometræ tam antiqui quam neoterici per Coni Sectiones easdem plerumque exposuerunt, & quia istæ curvæ nullo alio modo simul omnes & semel ostendi queant, atque etiam quia mutua singularum habitudo & cognatio quædam vix in altera explicandi forma adeò liquido innotescat, ob hasce, inquam, & hujusmodi rationes Curvarum harum naturas primo per Coni Sectiones, deinde verò per meras quoque in plano delineationes, sine Cono, ostendere operam dabo.

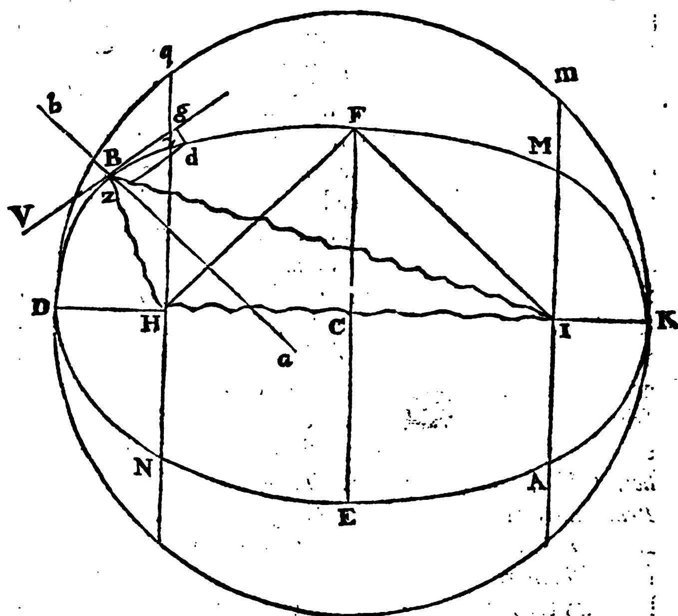
Si sumatur punctum quodvis extra planum, in quo descriptus est circulus, & per hoc punctum immobile recta linea ad utrasque partes puncti immobilis in infinitum producta peripheriæ circuli circumducatur, Superficies ortæ ex motu rectæ singulæ dicuntur *Superficies Conicæ*, Utræque vero infernæ & supernæ conjunctim dicuntur *Superficies ad verticem opposita:* Punctum immobile utrique superficiei commune dicitur *Vertex:* Circulus est *Basis*, & solidum a superficie conica & circulo basi comprehensum, & in infinitum, si placet, producendum, vocatur *Conus:* cui simile etiam & æquale ex

ex altera parte verticis generatur. Linea recta a Coni vertice ad circuli basis centrum *Axis Coni* dicitur; qui quidem Axis, si modo sit plano circuli basis perpendicularis, Conus *Rectus* dicitur; sin minùs Conus *Obliquus*, vel *Scalenus*. Jam verò si planum utcunque positum, modo non transeat per ipsum verticem, secet superficiem conicam, vel superficies ad verticem oppositas, planum illud *Planum Secans* audit, & aliud planum per verticem transiens, & plano secanti ubique parallelum *Planum Verticale* dicitur: Curva linea quam superficies conica in plano secante describit nuncupatur *Sectio Conica*; quæ quidem Sectio diversa est pro diversa plani secantis, in quo describitur, ad Conum inclinatione. Sin Planum secans utrasque conicas superficies ad verticem oppositas simul secet, orientur in Plano Secante binæ curvæ lineæ similes & æquales, quæ *Sectiones* vel *Hyperbolæ Opposita* dicuntur. Si itaque Planum Secans eo modo ad superficiem Conicam inclinetur, ut planum verticale, eidem parallelum, superficiem conicam, sive potius superficies ad verticem oppositas tangat, Curva Linea in plano secante descripta dicetur *Parabola*. Si verò ea sit plani secantis ad superficiem conicam inclinatio, ut planum verticale eidem parallelum sit extra conum, ita nempe ut non tangat superficiem conicam, Planum Secans utrumque coni latus secabit, & curva linea in plano secante genita dicetur *Ellipsis*. Sin ea demum sit plani secantis ad superficiem conicam inclinatio, ut planum verticale eidem parallelum conum secet, curva illa linea in plano secante descripta dicetur *Hyperbola*. & quia fieri non possit ut planum secans unam tantum superficiem secet, quin necesse est ut superficies utrasque ad verticem oppositas simul secet, binæ illæ curvæ lineæ similes & æquales *Hyperbolæ Oppositæ*, vel *Sectiones Oppositæ*, uti jamjam notavimus, appellabuntur. Si itaque Planum secans & verticale ita simul sibi semper parallelos circumagantur,

ut Verticale nunc basin secet, nunc superficiem Coni tangat, nunc extra conum sit positum, liquet a superficie conica varias *Hyperbolarum* species, *Parabolas* varias, varias demum *Ellipsium* species in plano secante delineatum iri. Liquet insuper qualis & quam arcta sit inter omnes hasce lineas cognatio. Si enim sectio sit basi parallela, vel etiam in cono scaleno subcontrarie posita, erit *Circulus*: qui itaque inter sectiones conicas, utpote Ellipsium extrema, merito numeratur: unde mutata gradatim plani secantis inclinatione orientur infinitæ Ellipsium Species; donec tandem inclinatio evadat coni lateri parallela, ubi Ellipsium extrema evadit *Parabola*: Mutatâ verò ulterius tantillùm plani secantis inclinatione, exurget *Hyperbola*; cujus infinitæ erunt species, pro varia plani verticalis intra conum inclinatione. Ita ut Ellipsium ultimæ hinc in circulum, illinc in Parabolam; Parabola hinc in Ellipsin, illinc in Hyperbolam; & Hyperbolarum ultimæ hinc in Parabolam, illinc in lineam rectam desinant. Verumenimvero quia difficilior forsitan non paucis apparitura sit Conica hæc curvarum regularium explicatio, visum est singularum naturas ex facili quadam in plano delineatione, cum Cartesio & aliis, qua possum perspicuitate ulterius exponere.

Ut Ellipseos ergo generationem & indolem rite capiamus, sint *H* & *I* duo puncta, vel clavi paxillive: his punctis circumponatur funiculus *BHI*: deinde immisso digito vel clavo funiculus æqualiter tensus maneat, dum circumagatur digitus vel clavus a motûs incipientis puncto *B* donec in orbem rediens ad idem punctum *B* iterum revertatur. Describetur hac puncti *B* revolutione curva linea, quam *Ellipsin* dicimus: quæ in eo tantum a circuli delineatione differt, quod Circulus circa centrum unicum, Ellipsis autem circa bina puncta tanquam centra describitur; quæ si, evanescente punctorum distantia *HI*, in unum coeant, elliptica curva hæc evadet perfecte circularis. Quo autem major est pun-

punctorum centralium distantia *HI*, manente nimirum funiculi longitudine, eo longius hæc figura a circulari recedet; & quo minor est distantia ista, ad circularem accedet magis; ita ut pro diversa distantiæ *HI*, ad funiculum *BHI*, vel ad lineam *DK* eidem funiculo æqualem, ratione diversæ ellipsium species describantur. At si funiculi longitudo eadem proportione minuatur vel augeatur quâ minuitur vel augetur punctorum centralium *H* & *I* distantia, describentur quidem Ellipses diversæ, sive diversarum magnitudinum omnes, sed quæ



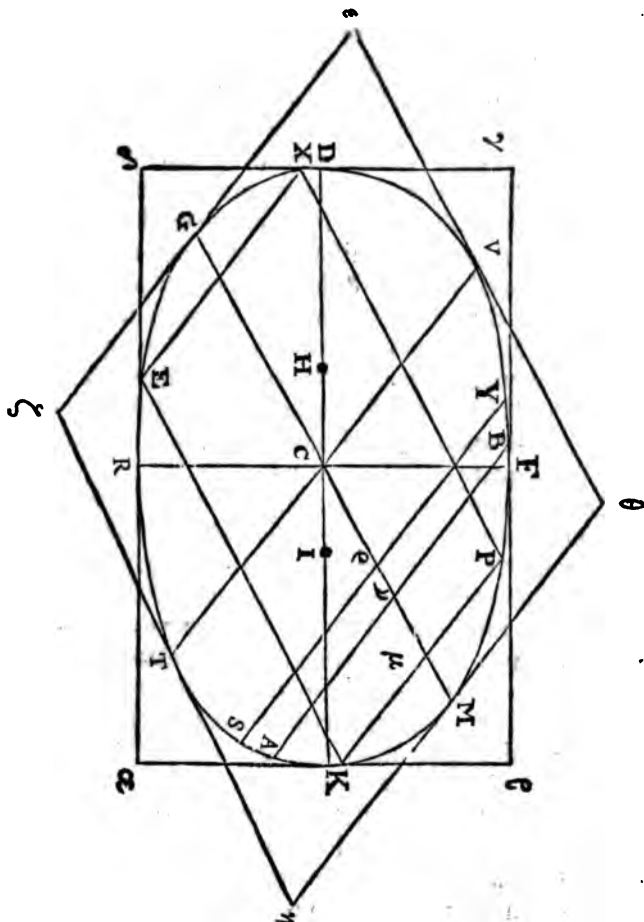
similes omnino sunt futuræ, seu ejusdem speciei. Unde perspicuum est Ellipses non magnitudine tantum, sed & specie innumeras esse, & a circulo ad lineam rectam extendi: Sicut enim coeuntibus punctis *H* & *I* Ellipsis evadit circulus, ita ad distantiam ipsius funiculi dimidiam recedentibus, Ellipsis fit linea recta, coalescente

utroque latere. Hinc etiam apparet unamquamque ellipseωn speciem non minùs distare ab alia qualibet, quàm distat omnium ultima hinc a circulo, illinc a rectâ lineâ. Patet quoque ex hac delineatione quod, si ex aliquo puncto pro arbitrio in peripheria elliptica electo, ut *B*, duas rectas ad duo puncta centralia agamus, hasce duas lineas *BH* & *BI* simul sumptas maximæ ejus diametro *DK* æquales fore, atque proinde earum summam semper dari. Quod sane ipsa constructio probat: Pars enim funiculi ab *I* ad *B* extensa, & inde ad *H* replicata eadem est omnino quæ porrecta ab *I* ad *K*, vel ad *D* inde itidem recurrit ad *I* vel ad *H*; ita ut *DH* sit æqualis *IK*, & *HD* una cum *DI* (sive *HB* cum *BI*) toti *DK* sint æquales.

Præcipuarum vero in Ellipsi linearum Nomina, & palmarias ejus proprietates hoc loco addemus; quo aliqualem saltem hujus curvæ longe nobilissimæ notitiam nacti, motus planetarum cælestes postea melius intelligamus. Cùm enim jam constet *planetas* omnes, & admodum verisimile sit omnes *cometas* in Ellipsibus circa Solem motus suos peragere, uti in sequentibus demonstrabitur, ideo majori cura Ellipseωs naturæ contemplandæ est incumbendum, quò veram coelorum Astronomiam, cursúsque planetarum & cometarum varios rectius percipere valeamus. *DFKR*, est *Ellipsis*: *C* ejus *centrum*: Puncta *H* & *I* sunt ejus *Foci*, sive *Umbilici*, *DK* est *Axis Major*, seu *Transversus*, sive *Diameter Principalis*, sive etiam *Latus Transversum*: *FR* est Axis *Minor*: Omnes lineæ rectæ per centrum *C* transeuntes sunt *Diametri*: Omnes lineæ rectæ ad peripheriam ellipticam terminatæ, & â Diametro quâvis bifariam divisæ dicuntur *Ordinatæ*, vel *Ordinatim applicatæ* ad istam diametrum. Sic *MG* per centrum transiens est *Diameter*, & *PK* ab eadem bifariam divisa ejusdem *Ordinata* vel *Ordinatim applicata*. Pars Diametri cujusque inter ejus verticem & ordinatam intercepta ut Mμ dicitur ejus *Abscissa*: Linea a Diametri vertice ipsius ordina-

dina-

dinatis parallelωs ducta, ut $\eta\theta$ eſt Ellipſeωs in iſto vertice *Tangens:* Diameter alterius Diametri ordinatis parallela ejuſdem dicitur *Diameter Conjugata,* & ordinatas



ſuas priori diametro parallelas habet. Sic diametri *GM* & *VT* ſunt ſibi invicem Conjugatæ, & ordinata *PK*

diametro *VT*, & ordinata *KE* diametro *GM* est parallela. Ordinata per focorum utrumvis ad axem majorem *MA* in figura prima dicitur *Latus Rectum* Principale, vel *Parameter* Axis majoris.

Palmariæ Ellipseωs Proprietates sunt hæ:

(1.) Diameter quælibet ut *MG* omnes ordinatas suas sibi invicem parallelas, ut *KP*, *AB*, *ST*, ad peripheriam ellipticam utrinque terminatas bifariam dividit.

(2.) Axium Ordinatæ sunt axibus ipsis perpendiculares: Sed Diametrorum reliquarum ordinatæ sunt ad diametros suas obliquæ, & in diversis speciebus eo magis obliquæ, paribus ab axe distantiis, quo ratio axis majoris, ad minorem est major; & in eadem ellipsi eo magis obliquæ, quo diametri sunt ab axibus remotiores.

(3.) Duæ tantum dantur diametri conjugatæ sibi invicem æquales; quarum Vertices æqualiter ab axium verticibus distant. Sic Diameter *VT* est diametro *GM* conjugata & æqualis, ubi nempe *VF* est æqualis *MF*, & *VD* æqualis *MK*.

(4.) Harum duarum diametrorum inter se æqualium & conjugatarum angulus obtusus *VCM* erit major, & acutus *VCG* erit minor omni alio angulo a diametris reliquis inter se conjugatis comprehenso.

(5.) Si sint lineæ μP & νB semiordinatæ ad diametrum quamvis *MG*; Quadratum semiordinatæ μP est ad Quadratum semiordinatæ νB ut est rectangulum $M\mu \times \mu G$ nempe sub partibus diametri factis ab ista ordinata, ad rectangulum $M\nu \times \nu G$ sub partibus diametri factis ab altera ordinata.

(6.) Latus Rectum vel Parameter diametri cujusque est post diametrum istam & eidem conjugatam tertia geometrice proportionali. Hoc est in figura prima Parameter vel Latus Rectum diametri cujusvis *DK* est *Y*. Si sit ut Diameter *DK* ad conjugatam diametrum *EF* ita *EF* ad *Y*. Unde *AM* Ordinata per focum, lateri recto principali, ut prius, æqualis, est post Axem majorem & minorem tertia

tertia proportionalis. Axes enim ſunt diametrorum inter ſe conjugatarum primariæ.

(7.) Quadratum ſemiordinatæ cujuſvis ut *MI* in prima figura minus eſt Rectangulo ex abſciſſa quavis ut *IK* in Latus rectum Diametri ſuæ, ſive quam *IK* × *Y*. Et quadratum ſemiordinatæ Pμ minus eſt Rectangulo ex abſciſſa Mμ in latus rectum ad diametrum *MG*, pertinens. A quo defectu vel ἐλλείψει Oritur hujus ſectionis nomen.

(8.) Si a puncto quovis *B* in figura prima ducantur ad focos lineæ rectæ *BH* & *BI* iſtarum ſumma axi majori æquabitur. Et ſi angulus *IBH* ab iis lineis comprehenſus a linea recta *ba* dividatur biſariam, Linea recta *ba* eſt tangenti in puncto *B*, ſive lineæ *VB*, hoc eſt, curvæ in ipſo contactûs puncto perpendicularis.

(9.) Curvatura arcuum ſimilium Ellipticorum quoad centrum Ellipſeωs eſt in diverſis a centro illo diſtantiis in quadruplicata iſtarum diſtantiarum ratione directe. Sic ſi *CK* ſit ipſius *CF* dupla, erit curvatura in diſtantiâ maximâ *K*, ad curvaturam in diſtantia minima *F*, ut ſedecim ad unum. Si *CK* ſit ipſius *CF* tripla erit curvatura in *K* ad curvaturam in *F* ut 81 ad 1: Atque ita in reliquis; uti olim oſtendetur.

(10.) Curvatura autem arcuum ellipticorum quoad focum eſt in diverſis diſtantiis a foco iſto in ſimplici diſtantiæ ratione directe; Sic ſi *HD* ſit dimidia ipſius *HK* erit curvatura quoad focum *H* ad *D*, curvaturæ quoad eundem focum ad *K* etiam dimidia; & ſic ubique. Et ita quoque res ſe habet in parabola & hyperbola.

(11.) Diſtantia corporis in Ellipſi circa focum *H* revolventis ab iſto foco eſt omnium maxima in puncto *K*, omnium minima in puncto *D*, & mediocris in punctis *E* & *F*; & diſtantia iſta mediocris *HF* eſt ſemiaxi majori *DC* vel *CK* æqualis: ut ex ellipſeωs geneſi, eſt apertiſſimum.

(12.) Subtenſa evaneſcens anguli contactus, diſtantiæ a foco parallela, ad æquale a diſtantia iſta intervallum perpendiculare, in eadem Ellipſi, quin & Parabola & Hy-

Hyperbola ſemper manet data ſive invariata. Sic ſi *dZ* ſemper detur, erit & *gd* in diſtantia infinite parva ſemper data.

(13.) Area Ellipſeωs eſt ad aream circuli circumſcripti ut axis minor ad majorem; & ita ſunt inter ſe partes correſpondentes quælibet ut: *MIK*, *mIK*; & Ordinatæ ad axem majorem ut *MI* dividuntura peripheria elliptica ut *M* in eadem ſemper ratione; ita ut *MI* ſit ad *mI* in eadem ratione data, nempe, in ratione axis minoris ad majorem. Neque aliter de circulo Ellipſi inſcripto eſt ratiocinandum.

(14) Parallelogramma omnia circa diametros Ellipſeωs conjugatas deſcripta, & Ellipſin comprehendentia ſunt ubique æqualia. Sic Parallelogrammum $\alpha\beta\gamma\delta$ eſt æquale Parallelogrammo $\epsilon\zeta\eta\theta$: & ſic ubique.

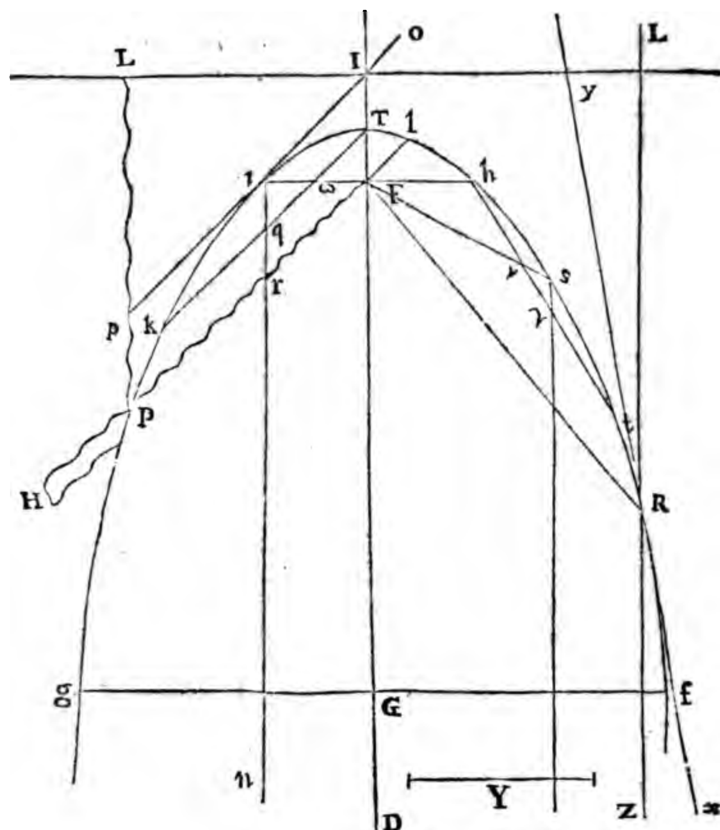
(15.) Si linea recta per focorum alterum ſemper tranſiens ita moveatur ut area elliptica ab eadem deſcripta ſit tempori proportionalis, motus angularis lineæ rectæ ab altero foco ad priorem in curva ducta erit fere æquabilis. Sic ſane in delineatione Ellipſeωs ſuperius allata, ſi ita lineæ *HB* motus angularis eſſet temperatus, ut pro reciprocâ diſtantiæ ratione acceleratus vel retardatus aream *DHB* tempori proportionalem deſcripſiſſet, Motus angularis *KIB* circa focum alterum *I* eſſet fere tempori proportionalis, & proinde ſine notabili acceleratione vel retardatione tantum non æquabilis; hoc eſt ubi Ellipſis a Circulo non admodum recedit.

Feb. 7. 170$\frac{3}{4}$.

II.

UT jam ab Ellipſi ad Parabolam tranſeamus, Sit *DI* linea recta infinita; eique ſit etiam linea recta infinita *IL* perpendicularis. Accepto jam in linea *DI* puncto quovis ut *F*, diviſáque biſariam linea *FI* in puncto *T*, Punctum illud *T* erit *Vertex principalis* figuræ

guræ, & deſcriptionis initium. Capiatur filum duplex *PH*, hoc eſt, filum vel funis ex filis vel funiculis binis,



æquali juxta ſe tenſione poſitis, conflatus: utriuſque funiculi extremitas punctis *F* & *I* affigatur eâ lege, ut funiculus uterque, ex quibus funis integer componitur, in partes duas diſtinctus, & hac illac æqualiter extenſus, lineam *FI* exacte adæquent; ita ut filorum partitio vel vertex ipſi puncto medio *T* directe ſuperemineat, punctumque *T* proinde ipſi filorum partitioni vel aperturæ

turæ subsit. His ita præparatis, Descriptoris manus, quæ fili partem integram tenet, hac illac versus partes dextram & sinistram ita moveatur, & ita funiculus duplex se aperiat, ut pinnula vel stylus per aperturæ punctum curvam lineam describat. Observandum est autem eo modo fila esse continuo movenda ut, extremitate unâ *L* lineam rectam *IL* semper occupante, filum *PL* sit lineæ *IL* perpendiculare; vel, quod eodem redit, ut sibi ipsi & lineæ *DI* maneat ubique parallelum; & ut altera fili extremitas puncto *F* immobili semper affixa adhæreat. Continuetur utrinque hujusmodi motus in infinitum, & inde orietur curva linea quam *Parabolam* dicimus. Cujus Curvæ lineas præcipuas & proprietates notissimas hic loci paucis explicabo. *gPiTsRx* est peripheria Parabolæ: *ID* ejusdem *Axis*, sive *diameter principalis*: *F Focus*, seu *Umbilicus*: punctum *T Vertex principalis* parabolæ: *ih Ordinatim applicata* ad axem per focum; lateri recto principali æqualis. Omnes lineæ rectæ ut *in* vel *RZ* axi parallelæ sunt *diametri*, utpote quæ ordinatim applicatas, tangentibus parallelas, ut *ih* & *KT* bifariam dividunt, & dicuntur Diametri ad vertices quibus terminantur ut *T*, *i* pertinentes.

Palmariæ Parabolæ proprietates sunt hæ:

(1.) *Diameter* quævis, vel linea recta axi parallela omnes lineas ordinatim applicatas, hoc est, tangenti in verticis puncto parallelas bifariam dividit.

(2.) *Axis Ordinatæ* sunt axi perpendiculares; sed *diametrorum reliquarum Ordinatæ* sunt ad diametros suas obliquæ; & eo magis obliquæ quo diametrorum vertices a vertice Parabolæ primario magis distant.

(3.) *Latus Rectum* vel *Parameter* ad diametrum quamvis pertinens, est post abscissam quamvis & semiordinatam suam tertia geometrice proportionalis: Hoc est, Latus rectum diametri *in* vel verticis *i* est *Y* si sit ut abscissa *iq*, ad semiordinatam *qk*, ita semiordinata illa *qk* ad *Y*.

(4.) La-

(4.) *Latus rectum principale*, sive ad axem pertinens est Ordinatæ per focum ib æqualis; & est distantiæ minimæ a vertice principali FT quadrupla.

(5.) Latus rectum ad verticem vel diametrum quamvis pertinens est distantiæ verticis istius a foco etiam quadruplum: sic latus rectum verticis s est ipsius Fs quadruplum, atque ita ubique.

(6.) Distantia verticis vel puncti cujusvis in parabola a foco est distantiæ minimæ a linea LL axi perpendiculari, & lateris recti principalis quadrante a vertice Parabolæ distante, ubique æqualis. Sic ex ipsa constructione liquet lineam FP esse lineæ PL æqualem.

(7.) Quadratum semiordinatæ cujusque ut qk, æquale est rectangulo ex verticis ejusdem Latere recto ut Y, & abscissa iq Diametri ad eundem verticem pertinentis. Et ex æqualitate παραβολῆς vel comparationis in hac figurâ inter rectangulum istud & semiordinatæ quadratum, absque defectu vel excessu, oritur hujus sectionis Nomen.

(8.) Ob datum itaque in quavis diametro latus rectum, sunt abscissæ ut semiordinatarum quadrata, sive in semiordinatarum ratione duplicata: Sic TF, est ad TG, ut iF quadratum ad gG quadratum; & sic quoque est iq ad ir ut qT quadratum ad rl quadratum; & ita ubique. Unde quoque ubi axis abscissa est lateri recto principali æqualis, sive distantiæ a vertice quadrupla, erit semiordinatæ suæ æqualis.

(9.) Angulus a tangente quavis & linea a foco comprehensus est æqualis angulo ab eadem tangente & diametro quavis, vel etiam axe comprehenso. Sic anguli IiF & pin sunt æquales. Unde sane, quod obiter est notandum, Omnes lucis radii in partem superficiei a convolutione parabolæ circa axem genitæ concavam axi parallelos incidentes a superficie ista paraboloide in focum F reflectentur, & ardorem vehementissimum generabunt: a quâ quidem proprietate *foci* nomen figuræ hu-

hujus umbilicus meruit: & idem nomen similibus punctis in Hyperbola & ellipsi communicavit.

(10.) Parabola, sicut & Hyperbola, spatium non claudit, sed in infinitum protenditur.

(11.) Curva Parabolica ad parallelismum cum diametris suis semper magis & magis in infinitum tendit; sed ad eundem pertingere nunquam potest.

(12.) Si duæ parabolæ eodem axe & vertice principali describantur, erunt axi communi ordinatæ in data ratione a parabolis resectæ; & areæ ab iisdem axe, ordinata, & curvis comprehensa erunt in eadem data ratione ad invicem.

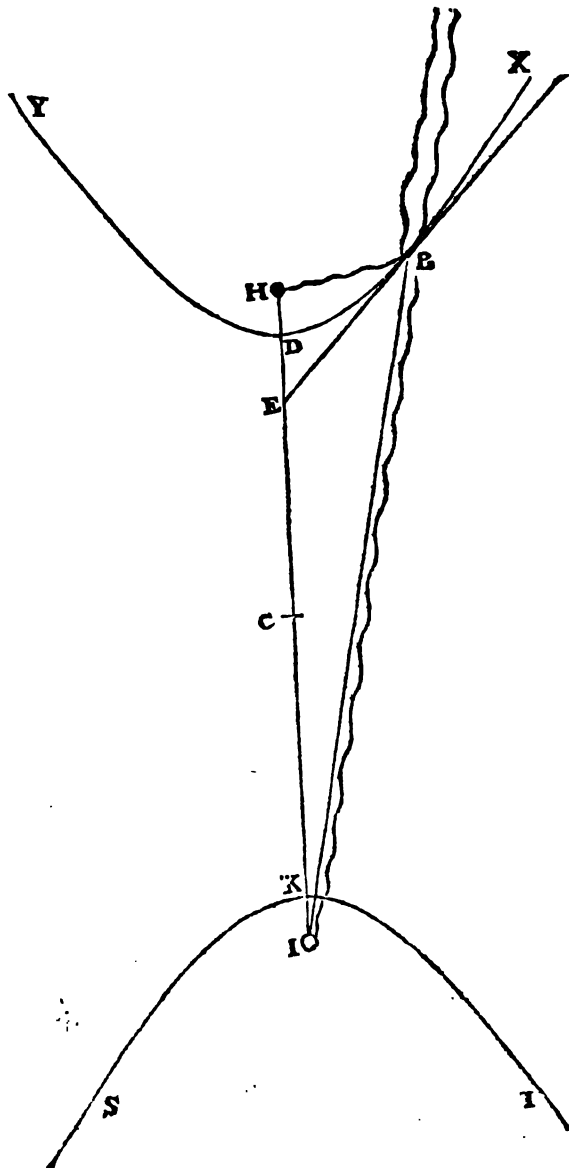
(13.) Spatium quodvis Parabolicum intra curvam & ordinatam comprehensum est ad parallelogrammum ex eadem basi & altitudine in ratione subsesquialtera sive ut 2 ad 3. & ad spatium externum in ratione dupla sive ut 2 ad 1. Sic *qiT* est ad *qiI* ut 2 ad 3. & ad *iIT* ut 2 ad 1. Unde Parabolæ Quadratura facillima oritur.

(14.) Distantia inter axis verticem & tangentis cujusvis intersectionem est æqualis axis abscissæ ad ejusdem ordinatam ex puncto contactûs applicatam. Sic *TI* est æqualis *TF*; & ita ubique.

(15.) Omnes Parabolæ sunt similes vel ejusdem speciei; quemadmodum omnes circuli.

(16.) Si per occursum duarum contingentium agatur diameter. Hæc diameter bisariam dividet conjungentem tactus. Quæ Parabolæ proprietas etiam Ellipsi & Hyperbolæ est applicanda.

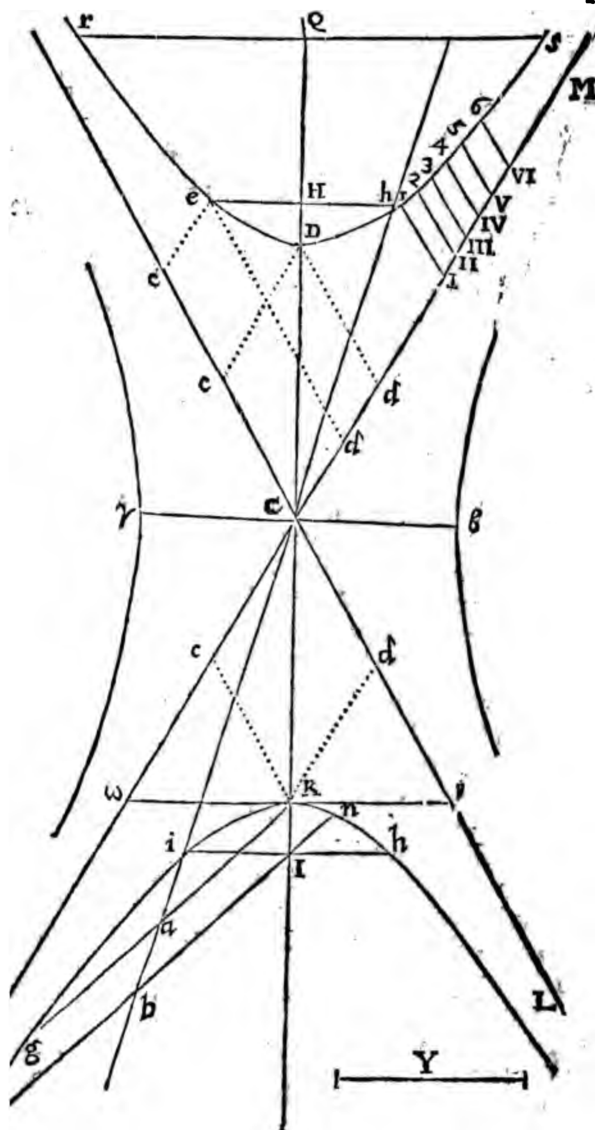
Ut jam a Parabola ad Hyperbolam transeamus: Sit Regula vel baculus *IB* satis longus, sint *I* & *H* puncta centralia, focis Ellipseos correspondentia, quibus clavi insigantur: Annexâ jam extremitati longi baculi vel regulæ resti baculo duplo breviori, altera ejus extremitas perforetur, & ita clavo *I* immittatur; nodus autem vel foramen in altera restis extremitate clavo alteri immittatur: Posito jam digito aut stylo in puncto *B*, ubi mutuo junctæ


X
Y
B
H
D
E
C
K
I
S
I

junctæ ſunt regula & reſtis, deſcendat digitus vel ſtylus dum reſtis regulæ arcte juncta, & velut agglutinata teneatur; qua opera prout digitus vel ſtylus deducitur, regula etiam circa clavum *I* continuo rotante, deſcribetur a puncto *B* ſive anguli *HBI* vertice lineæ curvæ *Hyperbolæ* dictæ pars *XBD*. Et poſtea, converſa in alteram partem regula, eaque ad *Y* prolata, eodem prorſus modo altera pars Hyperbolæ *YD* deſcribetur. Præterea, Si deſcriptor nodum vel foramen ſuæ reſtis transferat in clavum *I*, & regulæ extremitatem in clavum *H*, aliam Hyperbolam *SKT* priori omnino ſimilem & æqualem & ad verticem oppoſitam deſcribet. Sed ſi regula & clavis non mutatis, longiorem tantum reſtim admoveat, Hyperbolam alterius ſpeciei deſignabit: & ſi adhuc paulo longiorem, adhuc alterius, donec ipſam regulæ duplæ æqualem reddens, rectam lineam loco Hyperbolæ deſcribat. Deinde ſi Deſcriptor clavorum diſtantiam mutet eadem prorſus ratione qua mutat differentiam quæ eſt inter funis & regulæ duplæ longitudinem, Hyperbolas ejuſdem quidem ſpeciei deſcribet, ſed quarum partes ſimiles magnitudine different: Et tandem ſi æqualiter augeat longitudinem reſtis & regulæ, manente earum differentiâ, & clavorum intervallo, non aliam aut ſpecie aut magnitudine Hyperbolam deſcribet, ſed majorem ſolummodo illius partem.

Attamen fatendum eſt non paucas Hyperbolæ proprietates ex alio quodam generandi modo melius innoteſcere: Eum itaque, antequam ad hujus figuræ nomina & proprietates deveniam, declarare non pigebit.

Sint *LL* & *MM*. Lineæ rectæ infinitæ, in angulo quovis ſe interſcantes ad punctum *C*: A puncto quovis, ut *D*, vel *e*, ducantur primis lineis parallelæ *Dc*, *Dd* vel *ec*, *ed*; quæ cum lineis primo ductis conſtituant parallelogrammum, ut *Dc Cd*; vel *ec Cd*: Concipe bina parallelogrammi latera ut *Dc*, *Dd* vel *ec*, *ed* ita hac illac moveri ut paralleliſmum eundem ſemper ſervent


r
Q
s
M
6
5
4
3
2
1
VI
V
IV
III
II
I
e
H
h
D
c
c
d
d
γ
C
β
c
d
ω
R
n
i
h
I
a
b
g
L
Y

vent, & ut areæ æqualitatem pariter ſervent; hoc eſt, eſto *Dc* vel *ec* ſemper parallela *MM*; & *Dd* vel *ed* ſemper parallela *LL*: & area cujuſque parallelogrammi ſibi ſemper ſit æqualis, Ut eadem ratione latus unum augeatur qua diminuitur alterum: Hoc pacto punctum *D* vel *e* Curvam lineam, intra angulum a lineis primis comprehenſum, deſcribet; quæ eadem plane eſt *Hyperbola* quam prius & per Coni Sectionem, & per delineationem Carteſianam deſcripſi. Et pariter, In angulo ad Verticem oppoſito ſimilis & æqualis Hyperbola deſcribetur; modo parallelogrammum *CcKd* prioribus æquale eodem cum prioribus modo moveri ſupponatur. Quæ ſane *Hyperbolæ* ſimul *Sectiones Oppoſitæ* vel *Hyperbolæ Oppoſitæ* nuncupantur.

In utravis figurâ *DK* eſt *Axis Tranſverſus*, vel *Diameter Tranſverſa* Hyperbolæ, vel Sectionum Oppoſitarum: Punctum *C* centrum: Puncta *H* & *I* foci. In figura autem ſecunda Lineæ omnes per centrum *C* tranſeuntes, ut *ih*, ſunt *Diametri*. Si autem in angulis ſequentibus *LCM MCL* etiam Hyperbolæ deſcribantur, Sectiones iſtæ *Sectiones Sequentes* dicentur: & ſi diſtantia Verticis primarii iſtarum Hyperbolarum a communi omnium centro *C*, ut *Cϛ* vel *Cγ*, ſit æqualis ſemitangenti *Kν* vel *Kω* in vertice harum primario, *Sectiones* vel *Hyperbolæ Conjugatæ* dicentur: & omnes ſimul figuræ *Syſtema Hyperbolicum* audient: *ih* eſt *Ordinata* ad Axem, per focum, Lateri Recto principali, vel Axis Parametro æqualis: Diameter Indeterminata, ſive Sectionum ſequentium, quæ ordinatis diametri cujuſvis determinatæ, ſive Sectionum priorum eſt parallela, ejuſdem dicitur *diameter conjugata*: & ordinatas ſuas priori diametro parallelas habet.

Palmariæ Hyperbolæ & Sectionum Oppoſitarum Proprietates ſunt hæ,

(1.) Diameter quævis vel linea recta per centrum tranſiens omnes ordinatas ſuas ſibi invicem parallelas, & ad peripheriam Hyperbolicam utrinque terminatas bifariam dividit.

(2.) Axis

(2.) Axis Ordinatæ ſunt axi perpendiculares; Sed Diametrorum reliquarum Ordinatæ ſunt ad diametros ſuas obliquæ; & in diverſis ſpeciebus eo magis, paribus ab axe diſtantiis, obliquæ, quo ratio angulorum ſequentium eſt ad Hyperbolarum angulos major; & in eadem Hyperbola eo magis obliquæ quo diametri ſunt ab axe remotiores.

(3.) Si ſint Lineæ quævis ut *Hh* & *Qs ſemiordinatæ* ad diametrum quamvis *KD*, Quadratum ſemiordinatæ *Hh*, eſt ad quadratum ſemiordinatæ *Qs* ut rectangulum *KH DH*, ad rectangulum *KQ DQ*: Atque ita Quadratum *bn*, ad Quadratum *aK*, ut rectangulum *ib hb*, ad rectangulum *ia ha*: & ſic ubique.

(4.) *Latus rectum* vel *Parameter diametri* cujuſque eſt poſt diametrum iſtam & eidem conjugatam (vel tangentem ſuam ipſi æqualem) Tertia geometrice proportionalis: Hoc eſt Parameter vel Latus rectum diametri cujuſque ut *DK* eſt *Y*, ſi ſit ut *DK* Diameter ad ſibi conjugatam *ζγ*, vel ei æqualem *ωr*, ita conjugata iſta *ζγ* vel *ωr* ad tertiam *Y*. Et Latus Rectum principale eſt ordinatæ ad axem per focum æquale, & eſt minimæ foci a vertice diſtantiæ pluſquam quadrupla.

(5.) Quadratum Semiordinatæ cujuſvis ut *Qr* majus eſt rectangulo ex abſciſſa *DQ* in latus rectum diametri ſuæ, ut Y: Et pariter Quadratum ſemiordinatæ *bn* majus eſt rectangulo abſciſſæ *ib* in latus rectum diametri *hi*. A quo exceſſu ſive ὑπερβολῆς oritur hujus ſectionis nomen.

(6.) Si a quovis hyperbolæ puncto ut *B*, in figura priori, ducantur ad focum utrumque lineæ rectæ, ut *BH BI*, harum rectarum differentia æquabitur axi *DK*; uti ex delineatione facile conſtare poterit.

(7.) Si angulus *HBI* a lineis ad focos ductus comprehenſus biſariam dividatur a linea recta *EB* iſta linea recta erit Hyperbolæ tangens in puncto *B*.

(8.) Lineæ rectæ hyperbolas includentes *LL* & *MM* ſunt hyperbolarum Aſymptoti, ſive tales ad quas u-

trinque magis magisque accedit Curva, sed eas nunquam possit attingere, vel nunquam cum iisdem coincidere.

(9) Variæ sunt Hyperbolarum species pro varia anguli asymptotis comprehensi *LCM* magnitudine: Manente vero isto angulo species hyperbolarum manebit, sed pro magnitudine parallelogrammi describentis variæ hyperbolæ magnitudine diversæ orientur: Si vero angulus ab asymptotis comprehensus sit rectus, Hyperbola dicetur æquilatera, vel rectangula, & Latera recta omnium diametrorum erunt diametris suis (ut fit in circulo) ubique æqualia: & hyperbolarum eodem axe descriptarum, in variis asymptotorum angulis, lineæ rectæ axi perpendiculares erunt in proportione data ab omnibus resectæ, & spatia pariter a rectis seu ordinatis, axe producto, & curvis inclusa in eadem ratione data.

(10.) Si distantiæ ab hyperbolæ centro in asymptoto accipiantur in ratione geometrica; ita ut CI CII CIII CIV CV CVI sint continue proportionales geometrice; & ab istis punctis ducantur alteri asymptoto parallelæ lineæ I 1 II 2 III 3 IV 4 V 5 VI 6: erunt spatia I 2 II 3 III 4 IV 5 V 6 inter se æqualia. Atque adeo si Asymptotos ista *CM* secundum rationem numerorum omnium, naturali serie se invicem superantium divisa supponatur, erunt spatia ista numerorum omnium Logarithmis proportionalia.

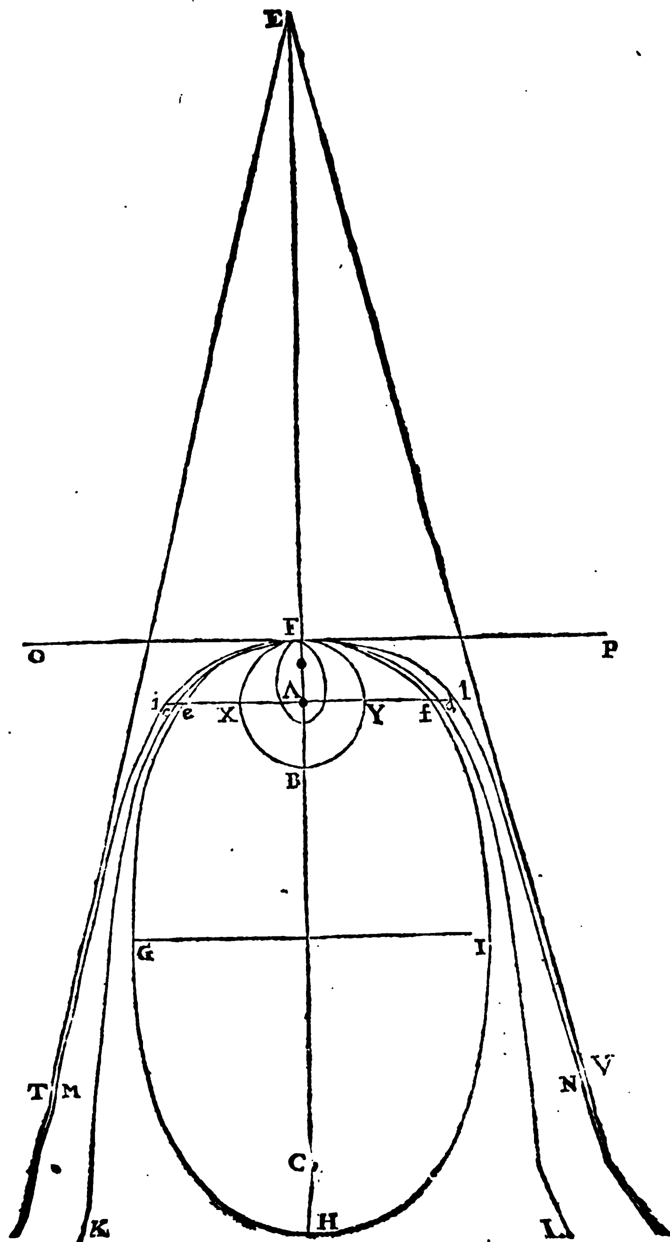
Feb. 14. 170$\frac{3}{4}$.

III.

EXpositis jam sigillatim lineis curvis quas Sectiones Conicas vocamus, Videamus paulo quid ex mutuâ omnium comparatione elucebit, & quænam sit inter singulas cognatio, qualis differentia & habitudo mutua, paucis consideremus.

Sit ergo *A* punctum, circuli *FXBY centrum*, &

Focus

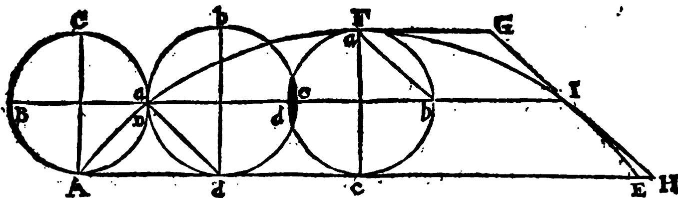

E
F
O
P
Λ
i
c
e
X
Y
f
d
l
B
G
I
T
M
N
V
C
K
H
L

Focus communis omnium sectionum: [Et est quidem Focus cujusque sectionis quasi centrum quoddam; & axi ordinatim applicata per Focum transiens, sive Latus Rectum cum circuli diametro per ejus centrum transeunte in plerisque magis congruit quam axis ipse sectionis:] Sit Punctum *F Vertex principalis* omnium sectionum: Sitque *FXBY* Circulus, cujus figuræ, utpote Ellipsium extremæ centrum cum focis coalescit: erit *XY* Latus rectum, si ita loqui liceat, circuli, per communem focum vel centrum transiens, & reliquis diametris æquale: Sit *FGHI* Ellipsis minus curva ad verticem *F* quam circulus, cujus focus remotior est *C*: Diameter Principalis sive Axis major *FH:* Axis minor *GI:* Latus rectum principale *ef*; nimirum distantiæ verticis *F* ab isto foco *AF* plusquam duplum, nec tamen quadruplum: Notandum autem aliam etiam Ellipsin circulo in *F* magis curvam oriri posse; sed circa punctum *A* tanquam focorum remotiorem descriptam. Post Ellipsin autem majorem Ellipseωs, centro in infinitum abeunte, oritur sectio conica *LdFcK*, quam *Parabolam* dicimus; quæ est sane Ellipseωs infinite longæ dimidium; cujus axis est infinitus *FH*, & Latus Rectum Principale *cd* est distantiæ verticis a foco *AF* quadruplum. Hujus Parabolæ curvatura in vertice *F* est adhuc minor quam ea Ellipseωs. Sequitur demum Hyperbola *MiFlN* Cujus parameter, sive Latus rectum principale *il*, distantiæ verticis a foco *AF* plusquam quadruplum: Cujus curvatura in vertice *F* est adhuc minor quam est ea Parabolæ: & quæ aucto in infinitum angulo *TEV* ab asymptotis comprehenso, & asymptotis in unam rectam *OP* desinentibus, in infinitum minuetur, donec ipsa hyperbola cum asymptotis suis in lineam Rectam axi perpendicularem tandem abeat. Unde notandum (1) Sectiones Conicas esse per se curvarum linearum regularium & congenerum systema, & Unam in alteram, ubi in infinitum augetur vel minuitur, perpetuo mutari. Ita circulus diminuta vel aucta tantillum

lum curvatura, in Ellipsin abit; Ellipsis autem centro ejus in infinitum abeunte, & curvatura eo pacto diminuta vertitur in Parabolam: Cujus curvatura si tantillum mutetur, exurget Hyperbolarum prima, quarum species cum sint innumeræ per curvaturam gradatim diminutam emergent omnes, donec evanescente curvatura hyperbola ultima in rectam lineam axi perpendicularem desinat. Unde patet omnem regularem & circulo congenerem curvaturam a circulo ipso, figurâ omnium maxime æquabili, usque ad lineam rectam, esse curvaturam conicam, sive Sectionem Conicam, & vario nomine pro diversis curvaturæ gradibus insigniri. Notandum (2.) Latus Rectum Circuli esse distantiæ a vertice duplum, Latera Recta Ellipsium omnes inter duplam & quadruplam rationes obtinere, pro variis earundem speciebus: Latus Rectum Parabolæ cujusque esse distantiæ istius exacte quadruplum. Latera tandem Recta Hyperbolarum omnes ultra quadruplam rationes obtinere; pro variis nempe earundem speciebus. Notandum (3.) Diametros omnes se intersecare in Circulò & Ellipsi in figuræ Centro intra Sectionem; at eo longius a vertice in Ellipsi quo illa a circulo in diversum longius abit: In Parabola Diametros omnes esse inter se & axi parallelas: In Hyperbola autem Diametros omnes se intersecare extra Sectionem, in communi centro Sectionum oppositarum. Notandum (4.) Eam esse in omnibus hisce figuris curvaturæ focum respicientis rationem, ut pro distantiâ a foco aucta vel diminuta, curvatura etiam in eadem ratione augeatur vel diminuatur. Quanquam enim propter obliquitatem tangentium curvatura plerumque in minori a foco distantia videatur major, & in majore minor, tamen Curvatura vera per subtensæ anguli contactus a distantiæ ratione differentiam definienda, est e contra in majori distantia major, & in minore minor, & in ipsa distantiæ auctæ vel diminutæ ratione major minorve; uti priùs

annotavimus, & ut in sequentibus plenius patebit. Atque hæc de Sectionibus Conicis.

Cum autem & lineæ Cycloidis dictæ usus aliqualis futurus sit, ejus descriptionem paucis etiam dabimus. Si super recta linea *AE* provolvi concipiatur Rota sive circulus *ABCD*. donec punctum ejus *A*, in quo dictam lineam tangit, eidem rursus post revolutionem integram occurrat in *E*, Emetietur Circulus Genitor *ABCD* lineam *AE* peripheriæ suæ æqualem, punctum *A* vero motu suo composito describet lineam Curvam *AFE*, quæ Trochoïdes sive Cyclois appellatur: Cu-



jus lineæ longitudo est diametri circuli genitoris quadrupla, & spatium Cycloidale, quod curva hæc & recta subtensa *AE* comprehendunt, est areæ circuli genitoris triplum. Cujus pars quævis a vertice æstimata, ut *FI*, est chordæ circuli *Fb* ubique dupla, cujus quoque tangens quævis ut *GIH* est eidem chordæ *Fb* ubique parallela.

Expositis jam Sectionum Conicarum, quin & Cycloidis natura, Generatione, & primariis affectionibus; Motuum Leges veras, tum vulgo notas, tum a Cl. Newtono primitus repertas trademus. Et in inventis Newtonianis sive hic loci sive deinceps proponendis, ipsissima viri maximi verba, ubi visa sunt per se clara satis & perspicua, usurpabimus; ita tamen ubique ut quæ obscuriora videntur & difficiliora facilius explicare & demonstrare, atque omnibus palam facile conemur.

DEFI-

DEFINITIONES.

CORPUS ſive Materia eſt ſubſtantia extenſa, ſolida, vel impenetrabilis, per ſe quidem ad motum vel quietem indifferens, iners, & paſſiva; Motus verò qualiſcunque, & figurarum formarumque omnium capax. Materiam ſubſtantiam *extenſam* dico, quod partem aliqualem ſpatii extenſi occupat: *ſolidam* vel *impenetrabilem* dico, non quod a ſpatio, vel forte a ſubſtantiis aliis incorporeis penetrari nequeat; ſed quod omni alii materiæ ſit impenetrabilis; & ideo rei *ſolidæ* nomen vel maxime mereatur: Materiam *ad motum vel quietem per ſe indifferentem* dico; non quod motum æque ac quietem rem plane negativam vel privativam exiſtimem, ſed quod corporis moti æque ac quieſcentis notio ſit pariter facilis atque familiaris: Materiam *per ſe inertem* dico atque *paſſivam*, quod nihil actionis vel ἐνεργείας vel αὐτοκινήσεως, aut in ejus natura aut affectibus unquam percipimus; quin e contra ex omnibus motuum phænomenis meram ejus inertiam ubique colligimus: *Motus vero qualiſcunque & figurarum formarumque omnium capacem* dico, quod quotidiana mundi phænomena, & experimenta infinita talem ejus indolem & naturam demonſtrant. Tempus, Spatium, Locum, & Motum, tanquam res omnibus notiſſimas vix opus eſt ut *definiamus:* Ad tollenda tamen præjudicia quædam, convenit cum Cl. Newtono quantitates haſce in *Abſolutas* & *Relativas*, *Veras* & *Apparentes*, *Mathematicas* & *Vulgares* diſtinguere, & ita quodammodo *deſcribere*; quod ordinis & methodi gratiâ ſequentibus definitionibus fiet.

(2.) Tempus Abſolutum, Verum, & Mathematicum eſt *Æterna & Æquabilis Duratio,* ex partibus ordine immutabili ſibi ſuccedentibus compoſita.

In ſe enim, & natura ſua æquabiliter fluit, abſque relatione ad externum quodvis. Nec enim pendet tempus

pus absolutum a motu rerum, nedum a quiete; nec quidem ab earum existentia: Sive enim res quævis existat, sive non existat; sive res existens moveatur sive non moveatur, perinde est in hoc casu. Fluit Tempus æquabiliter, utcunque res quævis aliæ se habent.

(3.) Tempus Relativum, Apparens, & Vulgare est *Sensibilis* & externa quævis Durationis, sive per motum sive per methodos alias *Mensura*; sive accurata sit illa mensura, sive inæquabilis; quâ vulgus vice veri Temporis utitur; Ut Hora, Dies, Mensis, Annus. Mundi vel Systematis cujusvis a principio ad finem perseverantia, &c.

Tempus Absolutum a Relativo distinguitur in Astronomiâ per æquationem temporis vulgi. Inæquales enim sunt dies naturales, qui vulgo tanquam æquales pro mensura temporis habentur. Hanc inæqualitatem corrigunt Astronomi, ut ex veriori tempore mensurent motus cœlestes. Possibile est ut nullus sit motus æquabilis quo tempus accurate mensuretur; Accelerari & Retardari possunt motus omnes; sed fluxus temporis absoluti mutari nequit. Eadem certe est duratio vel perseverantia existentiæ rerum, sive motus sint celeres, sive tardi, sive nulli. Proinde hæc a mensuris suis sensibilibus merito distinguitur, & ex iisdem colligitur per æquationem Astronomicam. In hoc enim incubuere Astronomi, ut ex inæqualibus corporum cœlestium motibus, motum circa aliquod centrum æquabilem reperiant; unde etiam durationem æquabiliter fluentem facilius & accuratius mensurent.

(4.) Spatium Absolutum, Verum, & Mathematicum est penetrabilis, indiscerpibilis, immobilis, sibi ubique similis, æterna, & infinita Extensio.

Nunquid hujusmodi Extensum a Corpore diversum reverà existat necne alia est quæstio: Hoc saltem ab omnibus sanis concedendum, hanc esse communem Spatii apud omnes notionem, atque adeo esse inter definitiones reponendum. Sicut enim Geometræ Circulum, Tri-

Triangulum, Quadratum, &c. primo in limine definiunt; an autem extent vel exstare possint hujusmodi figuræ parum laborant; Ita Spatii aliqualis descriptio erat præmittenda, ne de verbis lis aliqua postmodum oriretur: Ut ita deinde nunquid hujusmodi spatium a materia distinctum revera existat commodius disputetur.

(5.) Spatium Relativum (quod & *Locus*, ut opinor, non raro dicitur) est spatii Absoluti Mensura, seu dimensio quælibet mobilis, quæ a sensibus nostris per situm suum ad corpora definitur, & a vulgo pro spatio immobili usurpatur.

Ut dimensio spatii subterranei, aerei, vel cœlestis, per situm suum ad Terram definita. Idem sunt spatium Absolutum & Relativum specie & magnitudine, sed non permanent Idem semper numero: hoc est, Si cubiculi cujusvis spatium contentum seu cavitatem designamus, quocunque moveatur cubiculum Cavitas seu spatium intra ejus parietes inclusum ejusdem semper erit naturæ, propter spatii naturam sibi ubique similarem; & ejusdem magnitudinis, propter datam continentis magnitudinem. Non vero idem semper manet spatium numero; Ex motu enim cubiculi mutabitur illud perpetuo. Eodem modo, Si terra motu annuo circa Solem revolvat, Spatium aeris nostri, quod relative & respectu terræ idem semper manet, hoc est, ejusdem est naturæ & quantitatis, nunc erit una pars spatii absoluti, in quam aer transit, nunc alia; & sic absolute & reipsa mutabitur perpetuo. Ut vero partium temporis Ordo est immutabilis, sic etiam est Ordo partium spatii: Moveantur hæc de locis suis, & movebuntur, ut ita dicamus, de se ipsis. Nam Tempora & Spatia sunt sui ipsorum, & rerum omnium quasi Loca: In tempore quoad ordinem successionis, in spatio quoad ordinem situs locantur universa: De illorum essentia est ut sint Loca; & Loca primaria moveri absurdum est. Hæc sunt itaque absoluta Loca, & solæ translationes de his locis sunt absoluti Motus. Verum, quoniam hæ partes,

tes ſpatii videri nequeant, & ab invicem per ſenſus noſtros diſtingui, earum vice adhibemus menſuras ſenſibiles; ex poſitionibus enim & diſtantiis rerum a corpore aliquo, quod ut immobile ſpectamus, definimus loca univerſa. Deinde etiam & omnes motus æſtimamus cum reſpectu ad prædicta loca, quatenus corpora ab iiſdem transferri concipimus. Sic vice locorum & motuum abſolutorum relativis utimur: nec incommode in rebus humanis. In rebus autem Philoſophicis abſtrahendum eſt a ſenſibus. Fieri enim poteſt ut nullum reverà quieſcat corpus, ad quod loca motuſque hoc modo referantur.

(6.) Locus Abſolutus eſt pars Spatii abſoluti quam corpus occupat.

(7.) Locus Relativus eſt pars Spatii relativi quam corpus occupat. Dicimus Locum eſſe *Partem ſpatii*, non *Situm corporis*, vel Superficiem ambientem, uti nonnulli eum definierunt. Nam ſolidorum æqualium æqualia ſemper ſunt Loca; & eadem materiæ quantitas eandem ſemper Spatii quantitatem poſſidet; qualiſcunque ſit figuræ vel denſitatis. Ut ex. gr. ſphæræ & cubi ejuſdem magnitudinis abſolutæ æqualia erunt loca, quæ adimplent & adæquant, licet ſuperficies ambientes ob figurarum & proinde ſuperficierum diſſimilitudinem ſint inæquales; atque ita in omnibus. Motus etiam Totius idem eſt cum ſumma motuum omnium Partium; hoc eſt tranſlatio Totius de loco ſuo eadem eſt cum ſumma vel aggregato tranſlationum Partium omnium de locis ſuis: adeoque locus Totius idem cum ſumma locorum Partium; & propterea internus & in corpore toto. Situs verò proprie loquendo quantitatem non habent, nec majores & minores dicuntur, neque tam ſunt loca quam affectiones locorum.

(8.) Motus Abſolutus eſt Tranſlatio corporis vel ſubſtantiæ cujuſque de loco abſoluto, vel ſpatio immobili, in locum abſolutum, vel ſpatium aliud immobile.

(9.) Motus Relativus eſt Tranſlatio Corporis de loco relativo, vel ſpatio mobili, in locum relativum vel ſpa-

ſpatium aliud mobile: Sive Tranſlatio corporis de vicinia corporum ambientium in viciniam aliorum; ſive demum Tranſlatio corporis de ſitu inter alia corpora proprio in alium ſitum.

Sic in navi quæ velis paſſis fertur Relativus corporis Locus eſt navis regio illa in qua corpus verſatur; ſeu cavitatis totius pars illa quam corpus adimplet, quæque adeo movetur una cum navi: Et Quies Relativa eſt permanſio corporis in eadem illa navis regione, vel parte cavitatis. At Quies Vera eſt perpanſio corporis in eadem parte ſpatii illius immoti in qua navis ipſa, una cum cavitate ſua, & contentis univerſis movetur. Unde ſi terra vere quieſceret, corpus quod relative quieſcat in navi, moveretur verè & abſolutè ea cum velocitate qua navis movebatur in terra.

Sin Terra quoque moveatur, Orietur verus & abſolutus corporis motus partim ex terræ motu vero in ſpatio immoto; partim ex relativis motibus, tum navis in terrâ, tum corporis in navi; Et ex his motibus relativis orietur corporis motus relativus in terrâ. Ut ſi terræ pars illa ubi navis verſatur moveatur verè in Orientem cum velocitate partium 10010; & velis ventoque feratur navis in Occidentem cum velocitate partium 10; Nauta autem ambulet in navi Orientem verſus cum velocitatis parte una: Movebitur Nauta vere & abſolute in ſpatio immoto cum partibus velocitatis 10001 in Orientem, & relative in terra Occidentem verſus cum velocitatis partibus novem.

Feb. 28. 170$\frac{3}{4}$.

IV.

DEfinitiones nonnullas Philoſophiæ Newtonianæ præmittendas nuperrime propoſuimus. Nunc autem Scholium Generale definitionum ultimam & penultimam ſpectans ſupperaddemus.

Scholium Generale. Diſtinguuntur Quies & Motus Abſoluti & Relativi ab invicem per eorum proprietates,

tates, causas, & effectus. Quietis Absolutæ proprietas est quod corpora verè quiescentia quiescunt inter se: Ideoque cum possibile sit, ut corpus aliquod in regionibus fixarum aut longe ultra quiescat absolute, sciri autem non possit ex situ corporum ad invicem in regionibus nostris utrum horum aliquod ad longinquum illud corpus datam positionem servet, quies vera ex horum situ inter se definiri nequit. Motûs absoluti Proprietas est quod partes quæ datas servant positiones ad tota participant motus eorundem totorum: Nam gyrantium partes omnes conantur recedere de axe motûs, & progredientium impetus oritur ex conjuncto impetu partium singularum: Igitur motis corporibus ambientibus moventur quæ in ambientibus relative quiescunt. Et propterea motus verus & absolutus definiri nequit per translationem e vicinia ambientium corporum, quæ tanquam quiescentia spectantur: Debent corpora illa ambientia non solum tanquam quiescentia spectari, sed etiam vere quiescere: Alioquin Inclusa omnia præter translationem e vicinia ambientium participabunt etiam ambientium motus veros, & sublata illa translatione non vere quiescent, sed tanquam quiescentia solummodo spectabuntur. Sunt enim ambientia ad inclusa, ut totius pars exterior ad partem inferiorem, vel ut cortex ad nucleum: moto autem cortice nucleus etiam absque translatione de vicinia corticis, ceu pars totius unà movetur. Præcedenti proprietati affinis est quod moto loco relativo moveatur unà locatum; adeoque corpus quod de loco moto movetur participat loci sui motum. Sic si quis in navi dum velis passis fertur huc illuc obambulet, motus respectu terræ vel litorum major est vel minor prout in eandem partem cum navi vel in partem contrariam tendit: Si vero consistat in certa navis parte, participat motum navis, & eadem cum eâ celeritate progreditur: Si in eandem atque navis partem tendat, quoad terram celerius quam navis ipsa movebitur; si in contrariam, tardius: Et ita de motu in ipsa terra, si terra movea-

tur,

tur, ratiocinari oportet. Igitur motus omnes qui de locis motis fiunt sunt partes solummodo motuum integrorum & absolutorum; & motus omnis integer componitur ex motu corporis de loco suo primo, & motu loci hujus de loco suo, & sic deinceps usquedum perveniatur ad locum immotum; ut in exemplis supra memoratis patet. Unde motus integri & absoluti non nisi per loca immota definiri possunt: Et propterea motus hosce absolutos ad loca immota, relativos verò ad loca mobilia infra referemus. Loca autem immota non sunt nisi quæ omnes ab infinito in infinitum datas servant positiones ad invicem, atque adeo semper manent immota, spatiumque constituunt quod immobile appellamus.

Causæ quibus motus veri & relativi distinguuntur ab invicem sunt vires in corpora impressæ ad motum generandum. Motus verus nec generatur nec mutatur nisi per vires in ipsum corpus motum impressas. Cum enim Materiæ pars quævis sit iners & merè passiva, sine vi aliunde impressâ moveri nequit, nec deturbari e statu suo potest sine vi aliqua quæ statum mutet. At motus relativi, quales solum agnoscit Cartesius, generari & mutari possunt absque viribus in corpora ipsa impressis. Sufficit enim ut imprimantur in alia solum corpora ad quæ fit relatio, ut iis cedentibus mutetur relatio illa in qua horum quies vel motus relativus consistit. Sic quidem ad motum fixarum stellarum relativum sufficit, secundum Cartesium, terram solum circumrotari; & ad terræ quietem sufficit quod in Vortice Solari delata easdem materiæ subtilis partes ambientes habeat, licet unà cum illis quotannis eclipticam perlustret, & circa Solem absolute moveatur. Rursus, Motus verus a viribus in corpus motum impressis semper mutatur: at motus relativus ab his viribus non mutatur necessario. Nam si eædem vires in alia etiam corpora, ad quæ fit relatio, sic imprimantur, ut situs relativus conservetur, conservabitur etiam relatio, in qua motus relativus iste consistit. Ut si systema corporum modo quocunque inter se moveatur,

& vis æqualis in æquales ſyſtematis partes ſecundum lineas parallelas agat, licet vis iſta motum verum cujuſque partis reapſe mutet, relativum tamen non mutabit: æqualiter enim & per lineas parallelas agendo ſitus & motus partium relativi inter ſe iiſdem manebunt qui prius. Mutari igitur poteſt motus omnis relativus, ubi verus conſervatur; motuum ſcilicet corporum aliorum mutatione; & conſervari, ubi verus mutatur; ut in exemplo nuperrime allato videre eſt: & propterea motus verus in ejuſmodi relationibus minime conſiſtit.

Effectus quibus motus abſoluti & relativi diſtinguuntur ab invicem ſunt vires recedendi ab axe motus circularis. Nam in motu circulari nude relativo hæ vires nullæ ſunt: In vero autem & abſoluto majores ſunt vel minores pro quantitate motûs. Si pendeat ſitula a filo prælongo, agaturque perpetuo in orbem, ita ut vaſis fundum ſemper horizonti parallelum maneat, & axis motus ſit eidem perpendicularis, donec filum vel funis a contorſione admodum rigeſcat; Dein impleatur aqua, & una cum aqua quieſcat; Tum vi aliqua ſubitanea agatur motu contrario in orbem, uti prius; & filo ſe relaxante diutius perſeveret in hoc motu; Superficies aquæ ſub initio plana erit, & horizonti parallela, quemadmodum ante motum vaſis: At poſtquam vi in aquam paulatim impreſſa effecit vas ut aqua ſetiam ſenſibiliter, ad inſtar vorticis, revolvi incipiat, recedet ipſa paulatim e medio, aſcendetque ad latera vaſis figuram concavam induens, ut experientia monſtrabit; & incitatiore ſemper motu aſcendet magis & magis, donec revolutiones æqualibus cum vaſe temporibus peragendo quieſcat in eodem relative. Indicat hic aſcenſus conatum recedendi ab axe motus. Licet enim receſſio ab axe motus ſit per ſe axi perpendicularis, cum tamen vas ibidem vim cohibeat, imprimetur in particulas proximas, & ubi datur locus evadet ſenſibilis: Et quoniam motus vere circularis major erit in particulis aquæ a centro remotiſſimis, utpote iis primo & potiſſimum a vaſe communicatus; propter

ter majores circulos celeritatemque majorem versus circumferentiam, partes remotiores a centro recedent magis: Ideoque Oritur iste aquæ ascensus ex motu vero circulari, & per conatum hunc recedendi a centro innotescit & mensuratur. Qui quidem motus verus circularis est hic loci motui relativo omninò contrarius. Initio enim, ubi maximus erat motus relativus in vase, quod immota penè aqua solum gyrabatur, & per consequens àqua ipsa contenta quoad vas celerrime in partem contrariam movebatur respective, sine vero motu; Tum sane temporis motus ille relativus nullum excitabat conatum recedendi ab axe: Aqua non petebat circumferentiam ascendendo ad latera vasis, sed plana manebat; & propterea motus illius circularis verus nondum sensibiliter inceperat: Postea vero simul ac aquæ motus relativus decrevit, ascensus ejus ad latera vasis indicabat conatum recedendi ab axe; atque hic conatus monstrabat motum illius circularem verum, perpetuo crescentem, ac tandem maximum factum ubi aqua quiescebat in vase relative: Igitur conatus iste non pendet a translatione aquæ respectu vasis ambientis, (dum illud solum reverà movetur, & motus tantum relativus aquæ immotæ exinde affingitur.) Et propterea motus circularis verus per tales translationes definiri nequit. Unicus est corporis cujusque revolventis motus verè circularis, conatui unico tanquam proprio & adæquato effectui respondens: motus autem relativi pro variis ad varia corpora relationibus; situque, prout hoc vel illud respicit, diverso, innumeri sunt, & in omnes partes simul tendunt; atque relationum ad instar effectibus veris omnino destituuntur, nisi quatenus de vero illo & unico motu participant. Unde & in systemate eorum qui cœlos nostros infra cœlos fixarum in orbem revolvi volunt, & planetas secum deferre, Planetæ & singulæ cœlorum partes, quæ relative quidem in cœlis suis proximis quiescunt, moventur verè: Mutant enim positiones suas ad invicem, ob diversas revolutionum periodos, secus quam

fit in vere quiescentibus; unaque cum cœlis delati participant eorum motus, & ut partes revolventium totorum ab eorum axibus recedere conantur.

Igitur quantitates relativæ, quas jamjam a veris distinximus, non sunt eæ ipsæ quantitates quarum nomina præ se ferunt; uti spatium intra cubiculi parietes contentum, stellarum motus diurnus, &c. sed earum mensuræ illæ sensibiles (veræ an errantes) quibus vulgus loco mensuratarum & verarum quantitatum utitur. At si ex usu sunt definiendæ verborum significationes, per nomina illa Temporis, Spatii, Loci, & Motûs, proprie intelligendæ sunt hæ mensuræ, & sermo erit insolens & pure mathematicus, si quantitates mensuratæ vel veræ hic subintelligantur. Proinde vim inferunt Sacris Literis qui voces hasce de absolutis quantitatibus mensuratis ibi interpretantur, ut ii qui ex quiete terræ & motu Solis in Scripturis assignato de vero mundi systemate, contrà evidentes Philosophiæ & Astronomiæ rationes, disputare solent; ut & ii, si qui ideo insaniant, qui eò quod *tempus non amplius futurum* prædictum fuerit, ideo & ipsam æternam durationem seu tempus absolutum in nihilum abiturum colligunt. Neque minus contaminant Mathesin & Philosophiam qui quantitates veras cum ipsarum relationibus & vulgaribus mensuris confundunt.

Motus corporum veros cognoscere & ab apparentibus actu discriminare, est quidem difficillimum; propterea quod partes spatii illius immobilis, in quo corpora vere moventur, non incurrunt in sensus. Causa tamen non est prorsus desperata: Nam suppetunt argumenta, partim ex motibus apparentibus, qui sunt motuum verorum differentiæ; partim ex viribus, quæ sunt motuum verorum causæ & effectus. Ut si globi duo ad datam ab invicem distantiam, filo intercedente connexi, revolverentur, circa commune duorum gravitatis centrum; innotesceret ex tensione fili conatus globorum recedendi ab axe motûs, & inde quantitas motus circularis computari posset. Deinde, si vires quælibet æquales in alternas,

hoc

hoc est, sibi e diametro oppositas, globorum facies ad motum circularem augendum vel minuendum simul imprimerentur; hoc est, si alterum in partem unam, alterum in contrariam simul impelleretur, ex aucta vel diminuta fili tensione augmentum vel decrementum motûs circularis innotesceret. Et inde tandem inveniri possent facies globorum, in quas vires imprimi deberent ut motus maxime augeretur, id est, facies posticæ, sive quæ in motu circulari sequuntur. Cognitis autem faciebus quæ sequuntur, iisque per consequens quæ sunt oppositæ & præcedunt, cognoscetur determinatio motûs. In hunc modum inveniri posset & quantitas & determinatio motûs hujus circularis in vacuo quovis immenso, ubi nihil extaret sensibile & externum, quo cum globi conferri possent. Si jam constituerentur in spatio illo corpora aliqua longinqua datam inter se positionem servantia, qualia sunt stellæ fixæ in regionibus nostris; sciri quidem non posset ex relativa globorum translatione inter corpora utrum his an illis tribuendus esset motus, uti nos in Terra per motum quemvis stellarum fixarum apparentem determinare non possumus, num eæ vel terra ipsa revera moveatur: At si attenderetur ad filum, & inventum esset tensionem ejus illam ipsam esse, quam motus globorum requireret, concludere liceret motum esse globorum; & tum demum, ex translatione globorum inter corpora determinationem hujus motus colligere. Cum enim ex tensione fili constaret motum istum esse vere globorum, & non corporum longinquorum; per ista corpora ut immota jure jam spectata facile determinabitur motus globorum, tum quoad velocitatem, tum quoad directionem. Et hac quidem ratione annuum telluris motum, utpote vi centripetæ in Solem exacte proportionalem, colligimus; & fixarum quietem ex annuo telluris motu facile quoque colligimus. Cognitis itaque telluris motu & fixarum quiete, facile est annui motûs velocitatem & directionem ex stellis fixis exinde deducere. Quo autem pacto

motus veri ex eorum causis, effectibus, & differentiis apparentibus sunt colligendi; & contra, quo pacto ex motibus seu veris seu apparentibus eorum causæ & effectus colligendi sunt, fusius in sequentibus docebitur.

(10.) Quantitas materiæ est mensura ejusdem orta ex ipsius densitate & magnitudine conjunctim.

Aer duplo densior in duplo spatio quadruplus est. Et si vas cubicum aerem contineat, qui deinde in cubum minorem compressione reducatur, densitas in minore cubo, erit ad densitatem in majore, ut major cubus ad minorem; sive in ratione laterum cubicorum triplicata reciproce: distantiæque particularum aeris similium similiterque positarum erit in ipsa laterum cubicorum ratione reciproce. Idem intellige de nive & pulveribus per compressionem vel liquefactionem condensatis; & par est ratio corporum omnium quæ per causas quascunque diversimode condensantur. Medii interea, si quod fuerit, interstitia partium libere pervadentis hic nullam rationem habemus. Hanc autem materiæ quantitatem, ex densitate & magnitudine conjunctis æstimandam, sub nomine *corporis* vel *massæ* in sequentibus passim intelligimus. Innotescit ea per corporis cujusque pondus: æqualis enim hujusce materiæ quantitas, qualis demum cunque sit, æqualiter semper in terram gravitat, ponderique est ad amussim proportionalis; uti per experimenta pendulorum accuratissime instituta constat: prout in sequentibus docebitur. Unde sane, ut hoc obiter annotemus, certum est, aut nullum medium æthereum corporum poros permeare, aut saltem, si quod sit, cum nullatenus gravitet, nec corporum motui obstet, illud pari cum corpore vel materia priore censu haberi non debere; imo nec proprie loquendo corporis vel materiæ nomen mereri. Sed de his olim plura occurrent explicanda.

(11.) Quantitas motus est mensura ejusdem orta ex velocitate & quantitate materiæ conjunctim.

Motus totius est summa motuum in partibus singulis; adeoque in corpore duplo majore, æquali cum veloci-

velocitate, duplus eſt; & duplâ cum velocitate quadruplus. Quantitas igitur materiæ eſt rectangulo denſitatis in magnitudinem ductæ æqualis; & Quantitas motûs eſt rectangulo velocitatis in materiæ quantitatem ductæ æqualis. Unde ſanè vires machinarum omnium facillime deducuntur: Nam ubicunque in machinarum æquilibrio corpus majus eſt, ibi corporis iſtius erit tantò minor celeritas; & ubi corpus minus eſt, ibi corporis iſtius tanto major erit celeritas; ita ut quantitas motûs ex corpore in velocitatem ſuam ducto ſit ſemper utrinque æqualis; uti inferius pluribus dicetur.

(12.) Materiæ Vis inſita eſt potentia reſiſtendi qua corpus unumquodque, quantum in ſe eſt, perſeverat in ſtatu ſuo vel quieſcendi vel movendi uniformiter in directum per lineam rectam.

Hæc vis proportionalis eſt ſuo corpori, neque differt quicquam ab inertia maſſæ, niſi in modo concipiendi: per inertiam materiæ fit ut corpus omni de ſtatu ſuo vel quieſcendi, vel in motu ſemel incepto pergendi difficulter deturbetur: Unde etiam hæc vis inſita nomine ſignificantiſſimo *Vis Inertiæ* dici poſſit. Exercet verò Corpus hanc vim ſolummodo in mutatione ſtatûs ſui, per vim aliam in ſe impreſſam facta; eſtque exercitium ejus ſub diverſo reſpectu & Reſiſtentia & Impetus: *Reſiſtentia*, quatenus corpus ad conſervandum ſtatum ſuum reluctatur vi impreſſæ; *Impetus*, quatenus corpus idem vi reſiſtentis obſtaculi difficulter cedendo conatur ſtatum ejus mutare. Reſiſtentia quidem quieſcentibus, & Impetus moventibus propriè loquendo tribuendus videtur; & Impetum quemcunque, ubi corporum alterum quieſcit, ex moti corporis viribus poſitivis, potius quam ex quieſcentis negativis lubentius deduxero.

(13.) Vis impreſſa eſt actio in corpus exercita ad mutandum ejus ſtatum vel quieſcendi vel movendi uniformiter in directum.

Conſiſtit hæc vis in actione ſolâ, neque poſt actionem permanet in corpore: Perſeverat enim corpus in ſtatu

omni novo per ſolam vim inertiæ. Eſt autem Vis impreſſa diverſarum originum; ut ex ictu, ex preſſione, ex vi centripeta.

(14.) Vis centripeta eſt qua corpus verſus punctum aliquod tanquam ad centrum trahitur, impellitur, vel utcunque tendit.

Hujus generis eſt gravitas, quâ corpus tendit ad centrum terræ; vis magnetica, qua ferrum petit centrum magnetis: Attractio vel Tenſio fili ad lapidem in fundo circumactum retinendum. Ejuſdem etiam generis eſt vis illa, quæcunque ſit, quâ Planetæ perpetuo retrahuntur a motibus rectilineis, & in curvis lineis revolvi coguntur. Eſt autem Vis Centripetæ Quantitas trium generum; *Vis Abſoluta*, *Vis Acceleratrix*, & *Vis Motrix*.

(15.) Vis Centripetæ quantitas *Abſoluta* eſt ejuſdem menſura major vel minor pro efficaciâ cauſæ eam propagantis a centro per regiones in circuitu: Uti virtus magnetica major in uno magnete, minor in alio; major in majori, cæteris paribus, minor in minori: attractio ſeu tenſio fili major in gyratione majoris lapidis, minor in gyratione minoris; & major in ejuſdem lapidis gyratione celeriori, minor in tardiori. Et more non abſimili facile fuerit concipere gravitatem corporum in Solem paribus diſtantiis majorem eſſe poſſe quam in Terram aut Planetam quemvis, propter ingentem nimirum corporis ſolaris magnitudinem, uti deinceps explicabitur.

(16.) Vis centripetæ, centrum quodvis reſpicientis, quantitas *Acceleratrix* eſt ipſius menſura in diverſis a centro diſtantiis, velocitati proportionalis, quam dato tempore generat.

Uti virtus ejuſdem magnetis (cujus proinde quantitas abſoluta non mutatur) major in minori diſtantia, minor in majori: Vis gravitans in ſuperficie telluris paulò major circa polos, & paulò minor circa æquatorem; uti inferius patebit: Major quoque in ſuperficie terræ; in majoribus verò a centro diſtantiis multò minor; quemadmodum infra oſtendetur. Vis autem hæc gravita-

vitatis Acceleratrix in æqualibus a centro telluris distantiis est undique eadem, propterea quod corpora omnia cadentia, gravia an levia, magna an parva, fluida an solida, sublatâ nempe aeris resistentiâ, æqualiter acceleret. Omnia enim corpora in tubis vacuis cadentia eadem spatia eodem tempore ubique descendunt: quod ipsum quoque ex corporum quorumcunque pendulorum in eodem circulo vel cycloide simul oscillantium motu clarissimè demonstratur.

(17.) Vis centripetæ quantitas *Motrix* est ipsius mensura proportionalis motui, quem dato tempore generat.

Uti pondus majus in majori corpore, minus in minore; inque corpore eodem majus prope terram, minus in cœlis. Hæc vis est corporis totius centripetentia, pressio, conatus, vel propensio in centrum; & corporis *Pondus* dicitur. Innotescit autem semper per vim ipsi contrariam & æqualem quâ descensus corporis impediri potest. Vis ergo centripeta *Absoluta* centralis cujusque corporis est major aut minor, prout corpus centrale est majus aut minus, aut saltem magis aut minus potens & efficax: Vis *Acceleratrix* est ea ipsa vis perpetuo decrescens crescente distantia, & crescens decrescente distantia: Vis vero *Motrix*, seu ipsum Pondus, oritur ex vi acceleratrice in corpus ducta. Unde, data vi centripeta absoluta, erit in dato corpore vis motrix, ut vis acceleratrix; & data vi acceleratrice ut Corpus. Hasce autem virium quantitates brevitatis causa nominare licet vires *Motrices*, *Acceleratrices*, & *Absolutas*; & distinctionis gratia referre ad corpora, ad corporum loca, & ad centrum virium; nimirum, vim *motricem* ad corpus, tanquam conatum & propensionem totius in centrum, ex conatibus & propensionibus omnium partium compositum: & vim *acceleratricem* ad locum corporis, tanquam efficaciam quandam de centro per loca singula in circuitu diffusam ad movenda corpora, quæ in ipsis sunt; & vim *absolutam* ad centrum vel corpus centrale, tanquam causa aliqua præditum, sine qua vi-

vires motrices non propagantur per regiones in circuitu; sive causa illa sit corpus illud centrale, (quale est Magnes in centro vis Magneticæ, vel Terra in centro vis gravitantis,) sive alia aliqua quæ non apparet. Mathematicus saltem est hic conceptus, & nobis impræsentiarum sufficiens: Nam virium causas & sedes physicas jam non expendimus. Est igitur Vis acceleratrix ad vim motricem, ut celeritas ad motum: Oritur enim quantitas motûs ex celeritate ducta in quantitatem materiæ; & vis motrix ex vi acceleratrice ducta in quantitatem ejusdem materiæ: Nam summa actionum vis acceleratricis in singulas corporis particulas est vis motrix totius: Unde juxta superficiem terræ, ubi gravitas acceleratrix, seu vis gravitans in corporibus universis eadem est, gravitas motrix seu pondus est ut corpus: At si in regiones ascendatur, ubi gravitas acceleratrix fit minor, pondus pariter minuetur, eritque semper ut corpus in gravitatem acceleratricem ductum. Sic in regionibus, ubi gravitas acceleratrix duplo minor est, pondus corporis duplo vel triplo minoris erit quadruplo vel sextuplo minus. Porro impulsus & attractiones eodem sensu acceleratrices & motrices nominamus. Voces autem attractionis, impulsûs, vel propensionis cujuscunque in centrum indifferenter & pro se mutuò promiscuè usurpamus; Has vires non physicè sed mathematicè tantum considerando. Unde Caveat Lector, ne per hujusmodi voces cogitet nos speciem vel modum actionis, causamve aut rationem physicam alicubi definire; vel centris, quæ sunt puncta mathematica, vires verè & physicè tribuere; si fortè aut centra trahere, aut vires centrorum esse dixerimus. Hactenus Definitiones Philosophiæ Newtonianæ præmittendas exhibuimus: *Axiomata*, sive *Motuum Leges* in terminum proximum differemus.

Feb. 28. 170$\frac{3}{4}$.

Axio-

V.

Axiomata sive Motuum Leges.

(1.) Corpus omne perseverat in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quatenus a viribus impressis cogitur statum illum mutare.

Projectilia perseverant in motibus suis nisi quatenus a resistentiâ aeris retardantur, & vi gravitatis impelluntur deorsum: Trochus, cujus partes cohærendo perpetuo retrahunt se a motibus rectilineis, non cessat rotari, nisi quatenus ab aere aut ab inæquabili superficie, cui insistit, retardatur. Majora autem Planetarum & Cometarum corpora motus suos & progressivos & circulares in spatiis minus resistentibus factos conservant diutius. Hæc quidem motûs regula, omnium maxime fundamentalis, est sanè ex materiæ inerti & passiva natura evidentissima. Si quis enim corpus aliquod quiescens sine vi aliqua impressa moveri, aut corpus motum sine vi aliqua resistente momento temporis quiescere supponeret, non sine stupore illud & miraculi instar natura duce haberet; cum viribus externis ad motum sive generandum sive sistendum opus esse non possit non existimare.

(2.) Omnis motus per se est rectilinearis, sive in plagam certam determinatus.

Hoc ex ipsa motûs natura sequitur; cum motus sine ejusdem in plagam aliquam determinatione concipi nequeat. si autem semel in plagam aliquam directus intelligatur, perseverabit, ex lege priore, corpus secundum eandem rectam moveri, donec vires impressæ ab ista directione deturbent.

Si quando autem per curvam lineam corpus moveatnr, necesse est ut curvatura ista ex viribus extraneis perpetuo impressis oriatur; atque adeo simul ac vires illæ extraneæ cessant, corpus per curvam etiam moveri cessabit,

fabit, & per rectam lineam, curvam in puncto virium cessantium ultimò tangentem, sive secundum directionem suam ultimam rectilinearem, movebitur. Sic sane in lapide a funda circumacto res se habet. Quamprimum enim lapis a funda liberatur, non pergit in circulo quem prius descripserat, sed per circuli tangentem abit: &, vi gravitatis cum vi projectili jam composita, lineam Parabolicam describit; uti olim demonstrabitur.

(3.) Omnia corpora in gyros acta conantur a centro motûs sui recedere; & quò gyratio est celerior, eò magis ab isto centro recedere conantur.

Cum enim Corpora per se tendant ad motum rectilinearem, sive per curvarum, quas describunt, tangentes; & cum omnes tangentium partes a centro motûs longius absunt, quam partes curvarum, ad quas retrahuntur a viribus centripetis, perspicuum est conatum istum secundùm tangentes abeundi corpora ab isto centro perpetuo retrahere, & esse conatui contrario, sive vi centripetæ sustinenti & æquipollenti ad amussim æqualem.

(4.) Mutatio motûs proportionalis est vi motrici impressæ; & fit secundum lineam rectam quâ vis illa imprimitur.

Si vis aliqua motum quemvis generet, dupla duplum, tripla triplum generabit; sive simul & semel, sive gradatim & successive impressa fuerit. Et hic motus, quoniam in eandem semper plagam cum vi generatrice determinatur; si corpus antea moveatur, motui ejus vel conspiranti additur, & velocitatem auget; vel contrario subducitur, & velocitatem minuit; vel obliquo obliquè adjicitur, & cum eo secundum utriusque determinationem componitur: Si itaque cum eo aliquantulum conspiret, velocitatem aliquantulum adaugebit; si ei aliquantulum opponatur, eandem aliquantulum diminuet: sin ei ad angulos rectos occurrat, velocitatem in linea primæ spectatam nullatenus aut adaugebit, aut diminuet.

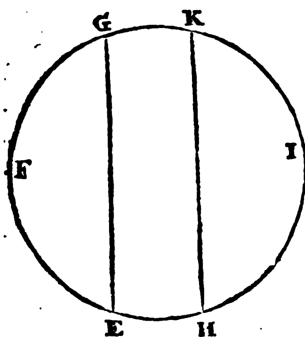
(5.) Acti-

(5.) Actioni contraria semper & æqualis est reactio: Hoc est corporum duorum actiones in se mutuo, sive sint impulsus, sive attractiones, semper æquales sunt, & in partes contrarias diriguntur.

Quicquid premit vel trahit alterum, tantundem ab eo premitur vel trahitur. Si quis lapidem digito premat, premitur & hujus digitus æqualiter à lapide. Si equus lapidem funi alligatum trahat, retrahetur etiam & equus æqualiter in lapidem: nam funis utrinque distentus eodem relaxandi se conatu urgebit equum versus lapidem, ac lapidem versus equum; tantumque impediet progressum unius, quantum promovet progressum alterius. Si corpus aliquod in aliud impingens motum ejus vi sua quomodocunque mutaverit, idem quoque vicissim in motu proprio eandem mutationem in partem contrariam, vi alterius, ob æqualitatem nempe pressionis mutuæ, subibit. His actionibus æquales fiunt mutationes non *velocitatum*, sed *motuum*; scilicet in corporibus non aliunde impeditis. Mutationes enim velocitatum in contrarias itidem partes factæ, quia motus æqualiter mutantur, sunt corporibus reciprocè proportionales. In attractionibus rem sic breviter ostendimus. Corporibus duobus quibusvis *A* & *B* se mutuo trahentibus concipe obstaculum quodvis interponi, quo congressus eorum impediatur. Si corpus alterutrum *A* magis trahitur versus corpus alterum *B*, quam illud alterum *B* in prius *A*, obstaculum magis urgebitur pressione corporis *A*, quam pressione corporis *B*; proindéque non manebit in æquilibrio. Prævalebit pressio fortior, facietque systema corporum duorum & obstaculi moveri in directum in partes versus *B*, motuque in spatiis liberis semper accelerato abire in infinitum; quod est absurdum, & legi primæ contrarium. Nam per legem primam debebit systema perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum; proindéque corpora æqualiter urgebunt obstaculum, & idcirco æqualiter trahentur in invicem. Vel si nullum

ad-

adſit obſtaculum res eodem modo ſe habebit; nam motus fortior debiliorem in occurſu vincet, & utrumque corpus in eandem partem, aucta ſemper celeritate, perget. Unde aut nulla in corporum ſyſtemate, ubi lex prima obtinet, quale eſt ſyſtema Solare, datur corporum attractio; quam tamen infra dari ſatis demonſtrabimus; aut eſt mutua ſemper in partes contrarias, & utrinque æqualis. Rem tentavit Cl. Newtonus in Magnete & Ferro. Ubi hæc in vaſculis propriis ſeſe contingentibus ſeorſim poſita in aqua ſtagnante juxta fluitabant, neutrum propellebat alterum, ſed æqualitate attractionis utrinque ſuſtinebant conatus in ſe mutuos, ac tandem in æquilibrio conſtituta quieſcebant. Sic etiam Gravitas inter terram & ejus partes mutua eſt & æqualis. Si Globus terræ *HEFGKI* in partes duas inæquales per lineam *GE* dividatur, Gravitas partis *EGF* in terram reliquam æqualis erit gravitati terræ reliquæ in hanc partem: Id quod hocce Argumento convincitur. Nam concipe terram planis parallelis in partes tres *EGF HKI EGKH* ſecari; quarum *EGF* & *HKI* ſibi mutuò æquales ſint, & parti mediæ *EGKH* incumbant. Et manifeſtum erit quod pars media *EGKH* pondere proprio in neutram partium extremarum propendet, ſed inter utramque in æquilibrio, ut ita dicamus, ſuſpenditur, & quieſcit. Pars autem extrema *HKI* toto ſuo pondere incumbit in partem mediam, & urget illam in partem alteram extremam *EGF*; ideoque vis qua ſumma partium *HKI* & *EGKH* tendit verſus partem tertiam *EGF*, æqualis eſt ponderi partis *HKI* & *EGKH*, id eſt, ponderi partis tertiæ *EGF*. Igitur ſi terra plano quovis *EG* in partes duas *EGF*



EGI secetur, vis quâ pars major *EGI* tendit in partem minorem *EGF*, æqualis est vi quâ pars minor *EGF* tendit in majorem *EGI*; hoc est, pondera partium in se mutuo sunt æqualia; & nisi pondera illa æqualia essent, terra tota ponderi majori céderet, & ab eo fugiendo abiret in infinitum. Quod, ut prius, est absurdum, & Legi primæ contrarium.

(6.) Si corporum duorum æqualium elaterii expertium, alterum motum alteri quiescenti occurrat, in occursu utraque cum dimidia moti corporis velocitate in eandem partem simul progredientur.

Corpus enim in motu positum in occursu eousque de motu suo alteri quiescenti communicabit, donec eâdem cum ipso celeritate abeat. Dum enim corporis in motu positi velocitas major est velocitate quiescentis, impellet ipsum, & ulterius accelerabit; quamprimum autem quiescens æquali velocitate abeat, ultra impellere non potest, sed unà comitabitur. Cùm ergo corporis prioris motus in duo æqualia corpora jam divisus supponatur, necesse est ut velocitas utrique communis sit prioris dimidia.

(7.) Si corpora duo æqualia, elaterii expertia, eadem velocitate sibi mutuò directe occurrant, ambo post collisionem quiescent.

Quantum enim alterum progreditur, tantum ab altero repellitur; & æquales motûs quantitates in partes oppositas tendentes sese mutuo omnino adæquabunt, & se invicem tollent: unde cum nulla jam sit novi motus causa, corpora utraque omnino quiescent. Perit ergo motus in hoc casu, nec eadem ejusdem semper quantitas in mundo manet; quod voluit Cartesius.

(8.) Si duo corpora inæqualia, elaterii expertia, sibi mutuò eâ velocitate occurrant, ut quantùm corpus alterum magnitudine superet, tantùm ab altero celeritate vincatur; seu si velocitates sint corporibus reciprocæ, utraque post occursum, ut prius, quiescent.

Cum enim quantitates motus in partes contrarias directi

recti sint in hoc casu utrinque æquales, se mutuo ut prius omnino destruent, & peribit motus, ut in casu priori.

(9.) Si corpus motum in quiescens impingat (utraque autem elaterii expertia intelligantur) utcunque sint mole & materiæ quantitate inæqualia, utraque post occursum communi velocitate in easdem partes ferentur; ut in Lege sexta; & velocitas communis tantùm minuetur, quantum corpora utraque simul sumpta corpore prius moto sunt majora. Cum enim motus universus prioris distributus jam in duo intelligatur, velocitas tantùm minuetur, quantùm materiæ movendæ quantitas augetur.

Corollarium. Datis itaque corporibus, dabitur unà & velocitatis moti corporis ante occursum, ad communem velocitatem motorum post occursum ratio. Nam ut Corpora utraque simul, ad Corpus motum, ita Corporis moti velocitas ante occursum, ad communem duorum velocitatem post occursum.

(10.) Si corpora duo, elaterii expertia, inæqualia, æquali autem velocitate in partes oppositas mota, sibi mutuò occurrant, quantitas motûs post occursum in utroque simul erit tantùm motuum priorum differentia. Quantitas enim motûs ex utravis parte minor æquali quantitati motus ex parte altera æquivalebit, eamque ut prius destruet: relinquetur itaque post occursum sola motuum differentia, tanquam unica motuum post occursum causa. Atque idem erit casus ac si corpus, ubi major erat motûs quantitas cum ista motuum differentia in alterum quiescens impingat, & eodem calculo post occursum æstimanda.

(11.) Si corpora duo, elaterii expertia, æqualia, inæquali velocitate in easdem partes moveantur, post occursum manebit eadem motûs quantitas, vel summa; velocitas autem communis erit dimidia velocitatis prioris utriusque simul sumptæ.

Excessus enim velocitatis in utrumque corpus æqualiter distribuetur; & proinde utrumque corpus mediocri velocitate post occursum simul abibit.

(12.) Si

(12.) Si duorum corporum, elaterii expertium, inæqualium, majus assequatur minus, communis velocitas post occursum major erit dimidia summa velocitatum. Contra vero eveniet si corpus celerius motum altero ponatur minus: tum enim communis velocitas postea erit ista dimidia summa minor.

Nam si corpora æqualia essent, communis velocitas post occursum, ut jam vidimus, esset isti dimidiæ summæ æqualis. Si ergo inæqualia ponantur, necesse est ut major minorve velocitatis quantitas pro celerioris corporis magnitudine aut parvitate oriatur.

Corollarium. Datis itaque utriusque corporis velocitate & magnitudine ante occursum, facile fuerit communem utriusque velocitatem post occursum calculo ubique indicare. Est enim ut Semissis Summæ corporum, ad corpus minus, ita Semissis Summæ motuum ad velocitatem communem post occursum. Exempli gratia, sit Corpus insequens corporis præcedentis & magnitudine & velocitate duplum: erit ergo Semissis Summæ corporum corporis minoris sesquialtera, & Semissis Summæ motuum ad minoris motum ut $2\frac{1}{2}$ ad 1. Unde, per auream regulam, velocitas communis post occursum, erit ad velocitatem minoris ante occursum, ut $\frac{5}{3}$ vel $1\frac{2}{3}$ ad unitatem. Nam $1\frac{1}{2} : 1 :: 3 : 2 :: 2\frac{1}{2} : \frac{5}{3} = 1\frac{2}{3}$. Si corpus insequens sit ad corpus præcedens ut 7 ad 3; & si velocitas corporis insequentis sit ad velocitatem præcedentis ut 13 ad 2. Erit Dimidium summæ corporum $= 5$. Corpus minus $= 3$. Motuum Summæ Dimidium $48\frac{1}{2}$. Ergo erit communis velocitas post occursum, ad velocitatem minoris antea ut $29\frac{1}{3}$ ad 2. sive $14\frac{2}{3}$ ad 1. Nam $5 : 3 :: 48\frac{1}{2} : 29\frac{1}{3} :: 14\frac{2}{3} : 1$.

Scholium. Hæ sunt veræ motuum Leges in corporibus aliquantulum cedentibus, quæ se non restituunt, seu nulla vi Elastica donantur; quæ forte perfecte duris, modo non sint Elastica, etiam convenient. *Elasticorum* autem corporum, quæ eadem vi se restituunt qua comprimuntur, quæque proinde *perfecte Elastica* dici debent,

Re-

Regulæ seu leges motus sunt a prioribus plane diversæ; quas itaque seorsim tractare & exponere oportebit. Cum autem corporum horum collisiones, phænomena & difficiliora & insigniora exhibeant; & cum Vir summus Cl. Hugenius easdem tractatu peculiari posthumo exponere & demonstrare aggressus sit, neque tamen sine magnis ambagibus longâque rationum & figurarum pompa, pro antiquorum Geometrarum more, absolverit, Libet Elasticorum Corporum Leges motus secundum Hugenii ordinem tradere, & ejusdem propositiones singulas breviori, &, ni fallor, magis naturali methodo demonstrare: ita ut vel ipsi Tyrones harum legum certitudinem & originem physicam aliquatenus intelligant. Esto itaque Corporum perfecte Elasticorum Lex motus prima & generalis.

(13.) Si Corpori perfecte elastico quiescenti aliud æquale corpus occurrat, post contactum hoc quidem quiescet; quiescenti verò acquiretur eadem quæ fuit in impellente celeritas. Corpus enim impellens motûs sui semissem impulsu directo, absque elaterii consideratione, quiescenti ex motûs lege 6ª, communicabit: & pari cum eodem passu incedere incipiet; & propter elaterium vi communicatæ par, motus semissem alium eidem communicabit; unde motus in integrum communicatus erit motui impellentis priori æqualis. Et cum necessum sit ut quantum impingens aut agendo aut reagendo, hoc est, aut mero impulsu, aut vi elastica in quiescens transferat tantum de motu suo amittat, sequitur corpus impellens amisso motu suo progressivo quiescere debere, dum corpus quiescens motum illius lucretur.

Coroll. (1.) Si Corpus majus in minus incurrat, non quiescet prius, sed solummodò tardius movebitur; & quiescens majorem velocitatem quidem, sed minorem motûs quantitatem, quam in impellente fuerat, lucrabitur.

Coroll. (2.) Si corpus minus in majus incurrat non quiescet prius, sed regredietur; & quiescens minorem velocitatem quidem, sed majorem motûs quantitatem, quam in impellente fuerat, lucrabitur.

Coroll. (3.) Si corpus in motu positum in corpora plura sibi contigua & quiescentia incurrat, omnia quiescent præter ultimum; quod pari, majori, minorive celeritate cum impellente movebitur, prout scilicet corpus impellens corpori ultimo sit æquale, majus, minusve. Hæc corollaria ex hac lege motus, sua quasi sponte sequuntur; nec proinde peculiari demonstratione admodum opus esse videtur.

(14.) Si corpora duo æqualia perfecte elastica inæquali celeritate lata se mutuo impellant, sive in partes easdem, sive in contrarias tendant, post contactum permutatis invicem celeritatibus ferentur. Nimirum si in partes easdem tendant, dempta utrinque celeritate utrique communi, relinquetur sola celeritatum differentia, tanquam unica mutationis in conflictu causa; & cum ex lege priori omnis ista velocitas tardiori communicari debeat, sequitur quod & corpus impingens excessu isto sit necessario multandum, & corpus tardius motum excessum istum sit lucraturum; hoc est, aliis quidem verbis sed eodem sensu, sequitur quod post contactum permutatis invicem celeritatibus moveri debeant. Neque Hæc Lex multo aliter in casu secundo, ubi corpora in partes diversas lata, & sibi contrarie incurrentia ponuntur; est demonstranda. Dempta enim utrinque velocitate utrique communi, quæ post conflictum in partes contrarias tendet, & velocitatem utriusque priorem non mutabit, restabit, ut prius, velocitatis differentia, tanquam unica mutandæ velocitatis causa: quæ itaque juxta legem priorem a velociore in tardius in integrum transferetur: unde ut prius, sequetur corpora etiamnum post contactum permutatis celeritatibus pergere debere.

(15.) Corpus quodcunque quamlibet magnum, a quocunque corpore quamlibet exiguo, & qualicunque celeritate impacto movetur. Hæc Lex motus est sane axioma per se manifestum, nec demonstrationis indigens.

 (16.) Quo-

(16.) Quoties duo corpora perfecte elastica inter se colliduntur, eadem est mutuo respectu discedentibus celeritas quæ fuit appropinquantibus: Sive verbis aliis sensu eodem, eadem est utriusque *velocitas*, non *absoluta*, sed eadem *velocitas* discedendi *respectiva* quæ fuit appropinquandi. Continet quidem hæc lex præcipuum etiam reliquarum motuum legum fundamentum; & hac methodo demonstrabitur. De æqualibus corporibus liquet propositum ex lege penultima, jamjam demonstrata: manent enim eo in casu ipsæ celeritates veræ & absolutæ, permutatis tantum sedibus; atque adeo ut celeritas discedendi respectiva eadem sit quæ fuit appropinquandi est necessum. De inæqualibus res sic conficietur. Si corpus majus assequatur minus, aut quiescens, aut saltem tardius motum, communicabit quidem de motu suo corpori quiescenti, vel tardiori; sepositâ etiam elaterii consideratione; nec tamen quiescet: & dum inter communicandum una cum quiescente vel tardiori perget non cessabit & impulsu directo, & reactione elastica quiescens vel tardius illud corpus accelerare, donec eadem velocitate a se recedat qua prius motui suo obstiterat, & elaterium suum compresserat; hoc est, qua ipsum ad alterum appropinquarat. Hanc sane celeritatem corpus majus minori necessario imprimet; sed majorem imprimere nequit, (licet corpus minus per se sit majoris capax: quam primum enim corpus quiescens vel tardius motum velocitatis gradum impulsui sive velocitati respectivæ priori parem fuerit lucratum, effugiet illico; neque impulsum quemvis ulteriorem sustinebit aut morabitur. Si autem corpus minus assequatur majus, aut quiescens, aut tardius motum, fieri nequit ut corpus minus integrum velocitatis suæ excessum quiescenti vel tardiori imprimat: (illud enim eo tantum casu fit ubi corpora sunt æqualia, ut in lege 13ª & 14ª jam vidimus.) Perit autem inter communicandum motûs velocioris excessus, etiam sepositâ elaterii consideratione: Et dum eo pacto unà progrediuntur

diuntur corpora, posterius in prius eousque reaget, donec eadem velocitate respectiva separentur, qua prius accesserant; Eatenus enim, nec ultra vires illæ elasticæ, impulsui pares, possunt; aut potius eatenus corpus minus reactionem patietur, nec ultra, prout in casu priori. In iis autem Corporibus quæ sibi mutuo inæquali utrumque velocitate occurrunt, demenda est utrinque velocitas utrique communis; utpote quæ velocitates *easdem* sed mutatis sedibus post conflictum generabit; tum autem relinquetur tantum velocitatum differentia, tanquam unica mutandæ velocitatis causa: quæ sane non cessabit & agendo & reagendo, corpora eadem celeritate respectiva a se invicem separare, qua prius accesserant. Rei cardo in eo ubique vertitur, ut Vires Elasticæ motui impresso ubique pares effectum suum integrum atque illibatum, nec ultra, ubique sortiantur. Quod aliter fieri non potest quam si velocitas recedendi respectiva, velocitati accedendi respectivæ ad amussim correspondeat.

(17.) Si duo corpora perfecte elastica eadem celeritate singula ad occursum revertantur, quâ ab impulsu resilierunt; singula post alterum impulsum eandem acquirent celeritatem quâ ferebantur ad occursum primum. Ob datam enim inter collidendum ictus vel conflictus magnitudinem, utpote velocitati respectivæ datæ parem, datur una rectangulum quoddam; cujus factores duo sunt distantiæ a puncto concursus, & primaria, & ea ad quam primo conflictu est reversum utrinque; si itaque rectangulum illud datum dividamus per distantiam primam tanquam *divisorem*, distantiam secundam, tanquam *quotum* obtinebimus: Sin per distantiam secundam, tanquam *divisorem*, dividamus, distantiam primam, tanquam *quotum* obtinebimus: & ita in perpetuum. Unde sequitur distantias istas dato tempore descriptas, sive velocitates accedendi & recedendi sibi mutuo respondere, & se invicem consequi.

(18.) Corporibus duobus ſibi mutuo occurrentibus, ſive elaſticis, ſive non elaſticis, non ſemper poſt impulſum eadem motus quantitas in utroque ſimul ſumpto conſervatur, quæ fuit ante; ſed vel augeri poteſt vel minui. Hanc motus legem, quæ contra Carteſium directe militat, è lege 7ª. prius deduximus, quoad corpora non elaſtica; & ex lege penultima de elaſticis etiam ſequitur. Cum enim motus quantitas ex celeritate in materiam ducta æſtimetur; & cum in corporibus utcunque inæqualibus, & inæquali celeritate motis, ita tamen res ſe habeat, ut velocitatum ſumma ſive velocitas reſpectiva maneat data, quantitas motus erit admodum inæqualis, prout corpus majus aut minus majorem velocitatis reſpectivæ integræ partem lucratur aut minorem; ut ex motuum calculo etiam mox inſtituendo clarius patebit.

(19.) Si corpus perfecte elaſticum majus minori quieſcenti occurrat, minorem ei velocitatem dabit quam duplam ſuæ. Cum enim poſt impulſum corpora eadem celeritate reſpectivâ a ſe invicem diſcedere debeant, qua ad invicem acceſſerant, hoc eſt in caſu præſenti, qua corpus majus ante impulſum motum eſſet; ſi Velocitas quieſcentis evaderet dupla velocitatis incurrentis, oporteret incurrens, poſt motum quieſcenti communicatum, eadem celeritate ſine ulla ejuſdem jactura pergere qua prius. Quod eſt abſurdum.

(20.) Si corpora duo perfecte elaſtica ſibi ex adverſo occurrant, quorum magnitudinibus celeritates contraria ratione reſpondeant, utrumque eadem qua acceſſit celeritate reſiliet. Cum enim Vires quæ ex mero corporum impulſu ſine elaterii conſideratione oriuntur, ſint utrinque æquales, ſe mutuo ex Lege 8ª ſubſtinebunt & deſtruent: Reſtabunt itaque ſolæ vires elaſticæ; quæ cum ſint utrinque & inter ſe, & motibus prioribus omnino æquales, æquales ex utraque parte motus generabunt. Atque adeo corpus utrumque eadem qua acceſſerat prius celeritate poſt occurſum reſiliet.

Scho-

Scholium. *Problema.* Datis corporibus duobus inæqualibus perfecte elasticis sibi directe occurrentibus, quorum utrumque, vel alterum tantum moveatur, dataque utriusque celeritate, vel unius si alterum quiescat, invenire celeritates quibus utraque post occursum ferentur. Fiat nimirum ut Summa Corporum, ad duplum corporis secundi, ita celeritas accedendi respectiva data, ad celeritatem alteram. *Differentia* inter hanc ultimo repertam celeritatem, & celeritatem corporis primi ante impulsum, (vel uno casu earum *summa* ubi nempe corpus primum in motu præcedit) dabit celeritatem corporis primi post occursum: qua celeritate ex integra celeritate respectiva data ablata, residua erit celeritas secundi post occursum. Regula autem hac methodo demonstratur. Velocitas primi post occursum erit velocitatis primi ante occursum, & velocitatis integræ respectivæ differentia, ubi corpora æqualia ponuntur; ita ut summa corporum sit duplo corpori secundo æqualis; ut ex lege 14. liquet. Patet itaque omnem differentiam, hoc est, motum corporis primi post occursum, à differentia summæ corporum & dupli corporis secundi oriri, eidemque proinde esse proportionalem. Quod illud ipsum est quod supponit præsens analogia.

Ex. gr. Moveatur Corpus primum dextram versus celeritate partium sex, & secundum in partem contrariam celeritate partium quatuor; sit etiam Corpus primum corporis secundi quadruplum: Erit igitur velocitas respectiva accedendi ante occursum partium decem $6 + 4 = 10$; & Corporum summa erit partium 5: Erit ergo ut Summa Corporum $= 5$ ad duplum corporis secundi $= 2$. Ita Velocitas respectiva integra $=$ 10. ad $\frac{2 \times 10}{5} = 4$: Cujus velocitatis & velocitatis primi ante occursum differentia $= 2$. dabit velocitatem primi post occursum. Unde celeritas secundi post occursum erit partium 12. *Q.E.I.*

Sin corpus alterum quiescat, ejus celeritas post occursum ex analogia priori immediate innotescet. Nempe si corpus majus in exemplo priori immotum ponatur, motus ejus ex hac analogia invenietur immediate. Nam ut Summa Corporum = 5. ad duplum corporis secundi = 2. Ita velocitas respectiva integra = 4. ad velocitatem secundi post occursum $= \frac{2 \times 4}{5} = \frac{8}{5}$ sive $1\frac{3}{5}$. Differentia enim inter celeritatem primi ante occursum quippe nullam, & celeritatem hanc, erit ipsa celeritas primi post occursum, & per consequens velocitas secundi erit partium $\frac{12}{5}$ sive $2\frac{2}{5}$.

(21.) Celeritas quam corpus majus perfecte elasticum dat minori quiescenti perfecte elastico, ad eam quam simili velocitate minus imprimit quiescenti majori, eandem habet rationem quam majoris magnitudo ad minoris magnitudinem. Ob datam enim in utroque casu velocitatem respectivam, & datam etiam corporum summam erit calculus in utroque casu similis, *viz.* Ut Summa Corporum data, ad velocitatem respectivam datam; ita duplum corpus majus, vel duplum minus ad velocitatem quæsitam. Sunt ergo velocitates ut corpora. *Q. E. D.*

Scholium. Libet hic loci, corollarii vice, tria reliqua Cl. Hugenii Theoremata huc spectantia attexere, licet eorum demonstratio longior sit quam quæ hoc in loco afferri debeat: Tum quod per se nobilissima sint, tum quod ex calculo juxta problema nuper propositum administrato satis constare possint.

(1.) Duobus corporibus perfecte elasticis sibi mutuo occurrentibus id quod efficitur ducendo singulorum magnitudines in velocitatum suarum quadrata simul additum ante & post occursum corporum æquale invenitur; si videlicet & magnitudinum & velocitatum rationes in numeris lineisve ponantur.

(2.) Si quod corpus perfecte elasticum majori vel minori quiescenti obviam pergat, majorem ei celeritatem

tem dabit per interpositum corpus mediæ magnitudinis perfecte elasticum itidem quiescens, quam si nullo intermedio ipsi impingatur: Maximam vero celeritatem tum conferet, quum corpus interpositum fuerit medium proportionale inter extrema.

(3.) Quo plura corpora perfecte elastica interponentur inter duo inæqualia perfecte elastica, quorum alterum quiescat, alterum moveatur, eo major motus quiescenti conciliari poterit: Maximus autem per unamquamque interpositorum multitudinem ita conferetur, si interposita cum extremis continuam geometrice proportionalium seriem constituant.

Notandum autem ex postremis duobus per Autoris calculum constare, Quod si corpora centum ex ordine dentur in proportione dupla, incipiatque motus a maximo, erit *celeritas* minimi ad celeritatem qua movebatur maximum proxime ea quæ 14.760.000.000 ad 1. Si vero a minimo motus incipiat, augebitur in universum *motus quantitas* secundum rationem proxime quæ 1. ad 4.677.000.000.000. Unde sane in casu priore mirandum *velocitatis*, in posteriore magis mirandum ipsius *quantitatis motus* augmentum consequitur.

Quæ autem (ut hoc tandem moneam obiter) Cl. Hugenius de omnibus corporibus, aut saltem de omnibus perfecte duris asseruit, nos tantum de omnibus perfecte elasticis, cum Cl. Wallisio & Newtono asseruimus & demonstravimus. Neque aliter certe aut intelligi aut affirmari debent. Motuum enim Leges quæ corporibus reliquis non elasticis congruunt, aliæ plane sunt plerumque, & ab hisce satis diversæ; prout ex ante dictis abunde constare potest: atque adeo cum elasticorum legibus sunt minime contaminandæ. Quæ autem corpora imperfecte elastica spectant, è Cl. Newtono in sequentibus tradentur. Sed Manum de tabula.

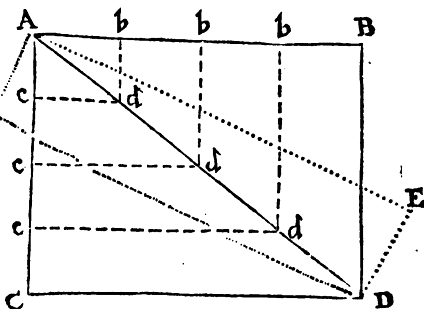
Maij 8. 1704.

VI.

MOTUUM Leges in corporum tum durorum tum elasticorum collisionibus observatas in prioribus absolvimus; restat jam ut reliquas motuum leges Philosophiæ Newtonianæ Præsternendas aggrediamur. Esto itaque,

(22.) Corpus omne viribus conjunctis diagonalem parallelogrammi eodem tempore describet, quo latera separatis.

Si corpus *A*, dato tempore, vi sola *AB*, secundum lineam *AB* impressâ ab *A* ad *B*. Et vi sola *AC*. secundum lineam *AC* impressa, ab *A* ad *C*: compleatur parallelogrammum *ABDC*, & vi utraque simul impressa corpus eodem dato tempore feretur ab *A* per lineam diagonalem ad *D*. Nam quoniam vires hæ simul impressæ non sunt sibi invicem oppositæ, se mutuo nequaquam tollent, sed motum quendam inter utrumque quasi intermedium generabunt. Etenim cum vis posterior *AC* secundum lineam *AC* ipsi *BD* parallelam & æqualem agat, hæc vis nihil mutare debet velocitatem



accedendi ad lineam illam *BD* a vi priore genitam: Accedet igitur corpus eodem tempore ad lineam *BD*, sive vis posterior imprimatur sive non; atque adeo in fine illius temporis reperietur alicubi in lineâ illâ *BD*. Eodem argumento cum vis prior *AB* secundum lineam *AB* ipsi *CD* parallelam & æqualem agat, hæc vis nihil mutare debet velocitatem accedendi ad lineam illam *CD*, a vi posteriore genitam. Accedet igitur corpus eodem tempore

pore adlineam *CD*, five vis prior imprimatur,five non; atque adeo in fine illius temporis reperietur alicubi in linea illa *CD*. Et idcirco Corpus in fine illius temporis in utriusque lineæ *BD* & *CD* concursu *D* ut reperiatur est necesse. Porro, cum idem omnino eadem prorsus ratione de punctis innumeris *ddd*, &c. in eadem diagonali linea satis demonstrari possit, liquet corpus ex conjunctis hisce viribus lineam rectam diagonalem semper describere debere. *Q.E.D.*

Coroll. (1.) Datis viribus velocitas ex earundem conjunctione orta erit eo major quo directiones virium primarum *conspirant* magis, sive, quo angulus *BAC* est minor; & eo minor quo directiones istarum virium sibi invicem magis *opponuntur*, sive, quo angulus *BAC* est major: Velocitas autem utriusque directionis secundum lineas parallelas *AC*, *BD* & *AB*, *CD* ad lineas *BD* & *CD* aliasve quascunque eisdem parallelas accedendi nullo modo ex harum virium conjunctione mutatur, sed semper manet invariata; uti ex propositionis hujus demonstratis patet.

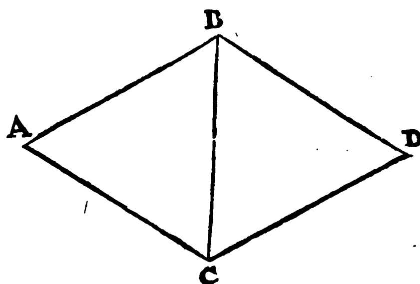
Coroll. (2.) Linea eadem diagonalis *AD* ex binarum virium innumerarum conjunctione describi potest. Sic si loco vis prioris *AB* supponatur alia *AE*, & loco posterioris *AC* supponatur alia *AF*, & perficiatur parallelogrammum *AEDF*, linea *AD* existente communi diagonali, Corpus ex hisce viribus conjunctis eandem lineam *AD* describet quam priusex aliis descripserat; uti ex hac propositione constat: Et par est ratio de binis quibuscunque viribus quibus latera parallelogrammi cujuscunque cujus *AD* est diagonalis describi debuerunt.

Coroll. (3.) Datis itaque tum magnitudine tum directione viribus datur una linea describenda, parallelogrammi nempe diagonalis; sed data linea descripta, sive diagonali, non illico dantur vires & directiones quibus ista diagonalis describeretur. Ratio in promptu est; quoniam datis parallelogrammi lateribus, & incluso angulo, datur una ipsum parallelogrammum, atque adeo

paral-

parallelogrammi iſtius diagonalis: Sed data linea longitudine & directione tanquam diagonali, non tamen exinde datur parallelogrammum; cum eadem linea verſus eandem plagam extenſa parallelogrammorum innumerorum diagonalis eſſe poſſit. Ut enim latera parallelogrammi data, ſine dato angulo incluſo, nullam certam diagonalem determinant, ità & diagonalis data ſine angulis hinc inde eidem adjacentibus datis Nulla certa latera determinare poteſt.

Coroll. (4.) Ubi vires primariæ *BA*, *BD* æquantur inter ſe; & angulum *ABD* graduum 120 gr. comprehendunt, velocitas ex conjunctis viribus eadem erit quæ ex alterutra ſeorſim: & virium directiones ſolæ mutabuntur; triangula



enim *ABC* & *BCD* in hoc caſu erunt æquilatera, & Rhombum component; & diagonalis proinde *B C* utrivis Rhombi lateri *AB* aut *BD* æqualis erit.

Coroll. (5.) Ubi vires primariæ ſunt æquales, & angulus a lateribus incluſus eſt rectus, velocitas ex viribus conjunctis erit velocitati ex alterutrâ ſeorſim incommenſurabilis; nimirum ut quadrati diagonalis ad ejuſdem latus; ideoque nullis numeris explicanda.

Scholium. Quæ de veris motibus & velocitatibus in hac propoſitione & ejuſdem corollariis dicta ſunt, etiam viribus quibuſcunque ſive ad motum conatibus ſunt applicanda. Sic ſi Corpus *A* in figura priore a duabus viribus eam inter ſe rationem quam lineæ *A C* & *AB* habentibus & ſecundum directiones earundem linearum datas impelleretur, premeretur, attraheretur, aut quoquo modò tenderet, licet propter obſtacula aut alias cauſas motus

revera

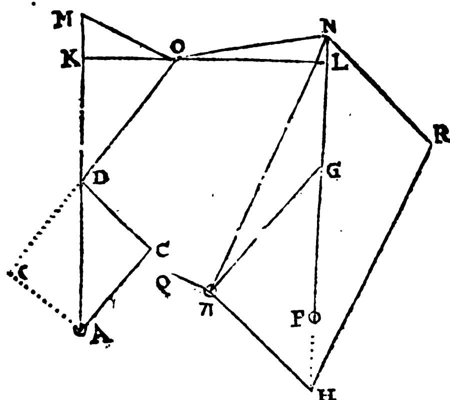
revera non statim sequeretur, impulsus aut vires ex istis conjunctis viribus ortæ, secundum directionem lineæ diagonalis *AD* tenderent; & velocitas generanda per istam lineam *AD* exponi deberet. Ut ex sequentibus facilius intelligetur.

(23.) Vires & Motus quicunque in vires & motus innumeros resolvi; & vicissim ex viribus aut motibus quibusvis obliquis Vires directæ & motus rectilineares innumeri componi possent.

Sic sane in figurâ priore eadem est motûs linea & directio sive componatur ex viribus *AB AC*, sive ex viribus *AE*, *AF*, sive etiam ex unico motu per eandem lineam *AD* impresso primario oriatur. Et vicissim motus quivis per rectam *AD*, licet forte ex vi simplici recta impellenti oriatur, considerari tamen potest quasi ex binis sive *AB AC*, sive *AE AF* aliisve innumeris similibus esset composita; cum idem omnino motus ex binis istis sequeretur. Nec aliter de motibus adhuc magis compositis erit ratiocinandum. Consideratis enim primo binis viribus & linea diagonali ex istis inter se conjunctis describenda; deinde, istis binis viribus ad unicam eo pacto reductis, adhibeatur vis tertia & cum eadem conjungatur, hinc orietur motus per alteram parallelogrammi cujusdam secundi diagonalem, & ita porro de vi quartâ, quintâ, *&c.* in infinitum. Neque aliter sane vis quævis directa, ubi opus, in plures resolvi potest. Quæ sane Virium Compositio & Resolutio adhibetur frequentissime, & abunde ex Mechanicâ confirmatur; uti jam cum Newtono ostendemus.

Si de rotæ alicujus centro *O* exeuntes radii inæquales *OM*, *ON*, filis *MA*, *NP*, sustineant pondera in æquilibrio, & quærantur vires ponderum ad rotam movendam; per centrum *O* agatur recta linea *KOL* filis pondera sustinentibus perpendiculariter occurrens in *K* & *L*; centroque *O*, & intervallorum *OK*, *OL* majore *OL* describatur circulus occurrens filo *MA* in *D*; per *O* & *D* agatur recta *OD*, cui sit perpendicularis *DC*, &

& eidem parallela *AC*; compleaturque parallelogrammum *DCAc*: Quoniam nihil refert utrum filorum puncta *K*, *L*, *D*. affixa sint vel non affixa ad planum rotæ, pondera idem valebunt ac si suspenderentur a punctis *K* & *L*, vel *D* & *L*; eadem enim (sepositâ ipsius fili gravitate) ejusdem corporis est gravitas, ubicunque affigitur filum in eadem linea horizonti perpendiculari: Ponderis autem *A* vis tota gravitans exponatur vel repræsentetur per lineam *AD*, tanquam parallelogrammi cujusdam diagonalem: ut ex ratione istius diagonalis ad latus parallelogrammi, ubi virium altera nulla est, innotescat, Vis illa tota quam *AD* designat re-



solvi potest in vires binas innumeras, sed cum reliquæ a nostro proposito sint alienæ, resolvatur in binas *Dc* (vel *AC*) & *DC*; alteram nempe secundum directionem radii *DO* protracti, alteram vero eidem radio perpendicularem. Harum virium Altera *AC* vel *cD* trahendo radium *OD* directe a centro, (tendit enim a *D* versus *c* in ipso radio protracto) nihil valet ad movendam rotam; Vis autem altera *DC* trahendo radium *DO* perpendiculariter idem valet ac si perpendiculariter traheret radium *OL*, ipsi *OD* æqualem: Cum vero rota ex hypothesi quiescat in æquilibrio, erit Pondus *P*, ad

P, ad Pondus *A*, ut Vis *DC*, ad Vim *DA*. Tota enim vis ponderis *P* trahit radium *OL* perpendiculariter, & ita integram vim ſuam confert ad rotam movendam: Sed Ponderis integri *A* per lineam *AD* expoſiti pars illa tantum quæ per *DC* exponitur trahit radium *OD*, ipſi *OL* æqualem perpendiculariter: alterâ parte ſecundum radium *cO* tendendo plane deperditâ: Pars illa itaque *DC* ſolummodo confert ad movendam rotam. Cum itaque, ob æquilibrium utrinque ſuppoſitum, Vis integra ponderis *P* æquivaleat cuidam tantum parti Ponderis *A*, nempe *DC*, liquet tanto majus eſſe debere Pondus *A* quam pondus *P*, quanto diagonalis *DA* eſt major quam latus *DC*. idque propter corporis *A* a perpendiculo *DC* declinationem. Eſt ergo ut Pondus *A*, ad Pondus *P*, ita *DA*, ad *DC*: hoc eſt, ob ſimilia triangula *ADC*, *DOK*, ut *OD* vel *OL* ad *OK*. Pondera itaque *A* & *P* quæ ſunt reciproce ut radii in directum poſiti *OL* & *OK*, idem utrinque valebunt, & ſic in æquilibrio conſiſtent. Atque hæc ſane eſt Libræ, Vectis, & Axis in Peritrochio proprietas notiſſima & fundamentalis, & ex hac virium reſolutione facile demonſtratur. Sin Pondus alterutrum ſit majus quam in hac ratione, vis ejus fortior prævalebit, & ad movendam rotam ſufficiet. Quod ſi Pondus *π* Ponderi *P* æquale partim ſuſpendatur filo *Nπ*, partim incumbat plano obliquo *πG*, agantur *NH*, *πH*, prior horizonti, poſterior plano *πG* perpendicularis; & compleatur parallelogrammum *πNRH*. Et ſi vis integra ponderis *π* deorſum tendens exponatur per lineam *πH*, hæc reſolvi poteſt in vires *πN*, *RN*. Et ſi filo *πN* perpendiculare eſſet planum aliquod *πQ*, ſecans planum alterum *πG* in lineâ ad horizontem parallela, & pondus *π* his planis *πQ* *πG* ſolummodo incumberet, urgeret illud hæc plana *πQ*, *πG* perpendiculariter, nimirum planum *πQ* vi *πN*, & planum *πG* vi *RN*: Ideoque ſi tollatur planum *πQ* ut pondus tendat filum, quoniam filum ſuſtinendo pondus jam vicem præſtat plani

ſub-

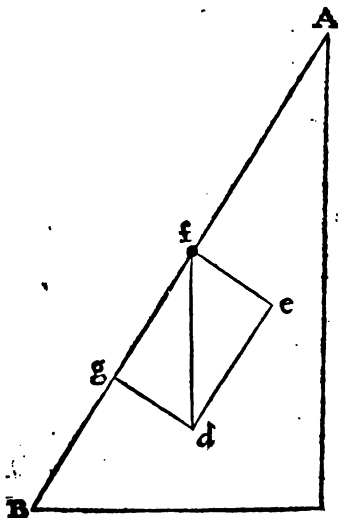
ſublati, tendetur illud eadem vi *N quâ planum anteà urgebatur: Unde tenſio fili hujus obliqui, erit ad tenſionem fili alterius perpendicularis *PN*, ut **N*, ad *NH:* Ideoque ſi pondus * augeatur in ratione *NH* ad *N** ſuſtinebit pondus *A*, & rota non movebitur. Unde ſi pondus *, ſit ad pondus *A*, in ratione reciprocâ minimarum diſtantiarum filorum ſuorum *AM PN* a centro rotæ, ſeu ut *KO* ad *OL*, & etiam in ratione directa *NH* ad * *N*, hoc eſt, rationes utraſque ſimul conjungendo, ut rectangulum *KO* in *NH* ad rectangulum *OL* in **N*, pondera æqualiter valebunt ad rotam movendam; atque adeo ſe mutuo ſuſtinebunt in æquilibrio; ut quilibet facillime experiri poteſt.

Coroll. (1.) Hinc via nova aperitur omnia pondera minora ex unico dato pondere menſurandi. Si enim planum **G* perfecte politum ad varios inclinationis gradus gradatim collocetur, idem pondus * vel *P* diverſis quibuſcunque ponderibus ſe minoribus æquivalebit; in ratione nimirum lineæ **N* ad *HN*. Atque adeo ſi tabella conficiatur rationes linearum * *N* & *HN* ad quoſcunque inclinationum gradus exhibitura, facile fuerit ex inclinatione plani **G* & unico dato pondere * vel *P* omnium corporum corpore * vel *P* minorum ut *A* pondera examini ſubjicere & determinare.

Coroll. (2.) Hinc etiam corporum in planis quibuſcunque inclinatis deſcendentium vel reclinantium velocitates vel pondera licet æſtimare: Sit *AB* planum inclinatum, & *f* corpus per illud planum deſcendens, vel in illud recumbens; exponatur vis gravitatis integra per lineam *df* horizonti perpendicularem, & reſolvatur illa vis integra in binas vires *fe* & *fg*, quarum altera *fe* ſit plano inclinato perpendicularis, cui itaque ferendo iſtud planum adæquate ſufficit; altera *fg* ſecundum planum inclinatum parallelos poſita, quæ itaque motui ciendo, vel ad motum ſaltem conatui vel ponderi procurando ſine impedimento impenditur: Eſt ergo motus vel pondus in plano inclinato, ad motum vel pondus

in

in plano ad horizontem perpendiculari, ut latus *fg* ad lineam diagonalem *fd*: hoc eſt, ob triangula ſimilia *fgd* & *ABC*, ut *AC* ad *AB*, ſive ut anguli *BAC*

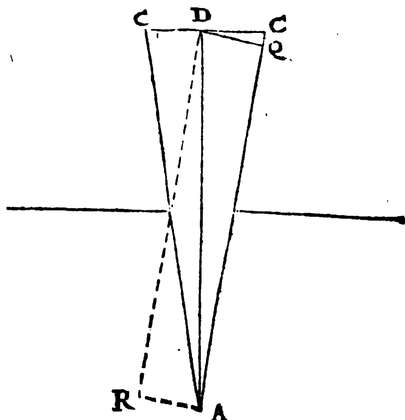


radius ad ſecantem; quæ eſt propoſitio in Mechanicis notiſſima.

Coroll. (3.) Hinc etiam vis cunei innoteſcit. Sit *CCA* cuneus, a malleo ictu directo impulſus: exponatur vis integra ictûs per lineam *DA*; & reſolvatur illa in binas vires *DQ* & *DR*; quarum altera *DQ* ſit ligni findendi faciei *CA* perpendicularis, atque adeo ad eandem faciem amoliendam directe diſpoſita; altera verò *DR* ſit eidem faciei parallela, atque adeo ad directe progrediendum diſpoſita; & idem de altero Cunei dimidio *DAC* intelligatur: erit itaque amolitio obicis ſecundum lineam *DQ*, ad progreſſum virium deorſum ſecundum lineam *DR*, ut *DQ* ad *DR*; hoc eſt, ob ſimilia triangula *DQA* *DCA*, ur *DC* ad *DA*; ſive, computatis etiam alterius partis viribus, ut *CC* ad *DA*; quæ eſt etiam notiſſima

cunei

cunei proprietas: & in mechanicis receptiſſima. Vel etiam, Si hanc rem cum Newtono abſolvere placuerit ex prius domonſtratis, Habebit in figura penultima pondus *planis duobus obliquis *Q *G incumbens rationem Cunei inter corporis fiſſi facies internas, & inde vires cunei & mallei innoteſcent; etenim vis quâ pondus *urget planum *Q, eſt ad vim quâ idem, vel gravitate ſua, vel ictu mallei impellitur ſecundum lineam horizonti perpendicularem, ut *N ad



NH; atque ad vim qua urget planum alterum *G ut *N ad NR. Sed & vis Cochleæ aliquo modo per ſimilem virium diviſionem colligi poteſt, quippe quæ, ex ſententia Newtoni, cuneus eſt a vecte impulſus.

Scholium. Uſus itaque hujuſmodi motus compoſitionis & reſolutionis latiſſime patet, & late patendo veritatem ejus evincit, cum pendeat ex jam dictis Mechanica tota, ab Authoribus diverſimode demonſtrata; ex hiſce enim facile derivantur vires machinarum, quæ ex rotis, tympanis, trochleis, Vectibus, radiis volubilibus, nervis tenſis, & ponderibus directe vel oblique aſcendentibus, cæteriſque potentiis Mechanicis componi ſolent; ut & vires Muſculorum ad animalium oſſa movenda.

Octob. 23. 1704.

(24.) QUA-

VII.

(24.) QUANTITAS motus quæ colligitur capiendo summam motuum factorum ad eandem partem, & differentiam factorum ad contrarias non mutatur ab actione corporum inter se.

Etenim actio eique contraria reactio æquales sunt, per motus Legem quintam; adeoque, per Legem quartam, æquales in motibus efficiunt mutationes versus contrarias partes: Ergo si motus fiunt versus eandem partem, quicquid additur motui corporis fugientis subducetur a motu corporis insequentis, sic ut *summa* maneat eadem quæ prius. Sin corpora obviam eant in eadem linea, æqualis erit subductio de motu utriusque, adeoque *differentia* motuum factorum in contrarias partes manebit eadem. Ut si corpus *A* sphæricum sit triplo majus corpore sphærico *B*, habeatque duas velocitatis partes; & *B* sequatur in eadem recta cum velocitatis partibus decem; adeoque motus ipsius *A*, ex velocitate & magnitudine conjunctim ortus, sit ad motum ipsius *B* eodem modo æstimatum, ut senarius numerus ad denarium: motuum ergo summa in eandem plagam est partium sedecim. In Corporum itaque *A* & *B* concursu si corpus *A*, pro varia Elaterii quantitate, lucretur motus partes tres, vel quatuor, vel quinque, corpus *B* amittet partes totidem; adeoque perget corpus *A* post reflexionem cum partibus novem, vel decem, vel undecim, & *B* cum partibus septem, vel sex, vel quinque; existente semper summâ partium sedecim ut prius; uti in corporibus aut non omnino, aut saltem minori gradu elasticis semper eveniet. Sin corpus *A* lucretur partes novem, vel decem, vel undecim, vel duodecim, adeoque progrediatur post occursum cum partibus quindecim, vel sedecim, vel septendecim, vel octodecim, Corpus *B* amittendo tot partes quot *A* lucratur, vel progredietur cum una parte, amissis partibus novem; vel quiescet amisso motu suo progressivo partium decem; vel

regredietur cum una parte amisso motu suo, & (ut ita dicam) unâ parte amplius, vel regredietur cum partibus duabus, ob detractum motum progressivum partium duodecim; &c. Atque ita summæ motuum conspirantium 15 + 1, vel 16 + 0, atque etiam differentiæ contrariorum 17 — 1 vel 18 — 2, semper erit partium sedecim, ut ante concursum & reflexionem. Quod in corporibus perfecte elasticis eveniet; uti ex legibus motus de iisdem prius expositis, & ex infra dicendis de imperfecte elasticis satis intelligi poterit. Cognitis autem motibus quibuscum corpora post reflexionem pergent, invenietur cujusque velocitas post eandem reflexionem, ponendo eam esse ad velocitatem ante reflexionem, ut motus post, ad motum ante. Ut in casu ultimo, ubi corporis *A* motus erat partium sex ante reflexionem, & partium octodecim postea, & velocitas partium duarum ante reflexionem, invenietur ejus velocitas partium sex post reflexionem, dicendo, juxta regulam auream; ut motus partes sex ante reflexionem, ad motus partes octodecim postea, ita velocitatis partes duæ ante reflexionem, ad velocitatis partes sex postea. Cum enim motus quantitas oriatur ex velocitate & magnitudine conjunctim, in dato corpore motus quantitas ex velocitate sola æstimabitur, atque adeo quantitas motus & velocitatis erunt sibi invicem directe proportionales. Quod si corpora non sphærica, vel diversis in rectis moventia incidant in se mutuo oblique, & requirantur eorum motus post reflexionem, cognoscendus est situs plani a quo corpora concurrentia tanguntur in puncto concursus; dein corporis utriusque motus distinguendus est in duos, unum huic plano perpendicularem, alterum eidem parallelum; motus autem paralleli, propterea quod nullo modo sibi adversantur, corporibus in se invicem secundum lineam huic plano perpendicularem agentibus, retinendi sunt iidem post reflexionem atque antea; & motibus perpendicularibus mutationes æquales in partes contrarias tribuendæ sunt, sic ut summa conspirantium

&

& differentia contrariorum maneat eadem quæ prius. Exempli gratia, sit corpus sphæricum *A* & perfecte elasticum triplo majus corpore sphærico *B* perfecte etiam elastico, habeatque *A* duas velocitatis partes, per lineam *AE* in duas æquales partes bisectam expositas; Corpus *B*

O B A G N C E F L D I I M K

ei oblique occurrat secundum rectam *BE* in angulo *AEB* cum velocitatis partibus decem, per lineam *BE* in decem partes inter se & cum prioribus æquales sectam expositis; bisecetur angulus *AEB* a recta *OEM*: Demittantur *AG* & *BO* ad lineam *EO* perpendiculares; & perficiantur parallelogramma *ACEG BOED*. Erit

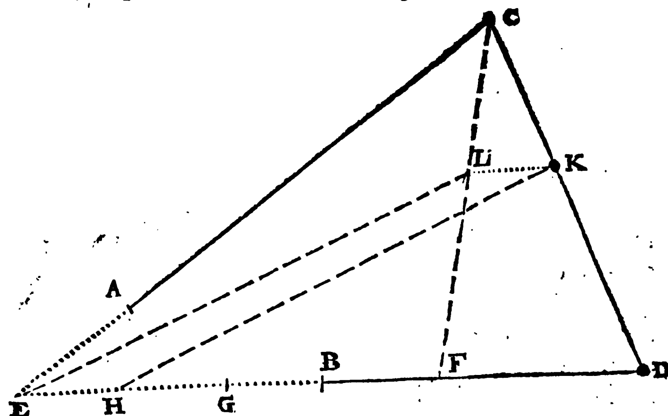
itaque planum per *OM* illud a quo corpora sphærica *A* & *B* in puncto concursus tangentur; & motus obliqui per diagonales *AE* & *BE* utrinque in binos distinguentur, *AE* nimirum in *AG* & *AC*, & *BE* in *BO* & *BD*, quorum motuum alteri *AG* & *BO* vel *CE* & *ED* sunt plano occursus perpendiculares, quibus itaque solis tanquam ~~directe~~ sibi invicem oppositis & in partes directe contrarias *EC* & *ED* tendentibus omnis motuum mutatio in occursu est referenda; alteri vero *AC* & *BD*, vel *GE* & *OE* sibi invicem paralleli, & in puncto occursus in eandem penitus plagam *EM* tendentes, adeo non sibi invicem contrariantur ut potius directe conspirare sint censendi, atque adeo retinendi sunt iidem post reflexionem atque antea. Quare sit *EI* æqualis ipsi *EG*, & *EM* æqualis ipsi *EO*; & ut motuum mutationes in partes contrarias factas, & juxta lineam *CD* dirigendas æstimemus, calculum ineamus secundum motus legem vigesimam, è Cl. Hugenio mutuo acceptam. Fiat itaque ut Summa Corporum *A* & *B* $= 4$, ad duplum corporis $B = 2$. Ita celeritas accedendi respectiva *CD* partium 12 : (Nam ob triangula similia *AGE BOE*, *AG* sive *CE*, est ad *BO* sive *ED*, ut $AE = 2$, ad $EB = 10$; atque adeo $AE + EB = 12$) ad dimidium ipsius $CD = CF = 6$. Et differentia inter hanc celeritatem partium 6, & celeritatem corporis *A* ante impulsum partium 2, $= 4$, exhibebit celeritatem qua corpus *A* post occursum movebitur: qua celeritate ex integra celeritate respectiva ante occursum ablata, $12 - 4 = 8$, restat corporis *B* post eundem occursum celeritas. Sit ergo *EN* partium 4, & *EL* partium 8, & perfectis parallelogrammis *ENHI* & *ELKM*, ductisque diagonalibus *EH* & *EK* corpora *A* & *B* eodem tempore quo ad occursum per diagonales *AE* & *BE* prius properabant, post occursum ad puncta *H* & *K* per diagonales *EH* & *EK* regrediendo pervenient; & erit motus corporis $A = 4 \times 3, = 12$ partium; & motus corporis $B = 8 \times 1, = 8$

= 8 partium, quorum motuum differentia est partium quatuor, quæ etiam erat motuum ante occursum differentia. Quapropter in hoc casu quantitas motus quæ colligitur capiendo differentiam motuum factorum ad partes contrarias non mutatur ab actione corporum inter se: atque adeo in corporibus oblique impingentibus valet hæc regula æque ac in iis quæ directe impingunt. Ex hujusmodi autem reflexionibus oriri etiam solent motus circulares corporum circa centra propria: Sed hos casus in sequentibus non opus est ut consideremus: & nimis longum esset omnia huc spectantia demonstrare.

Lemma ad Legem motus 25^m.

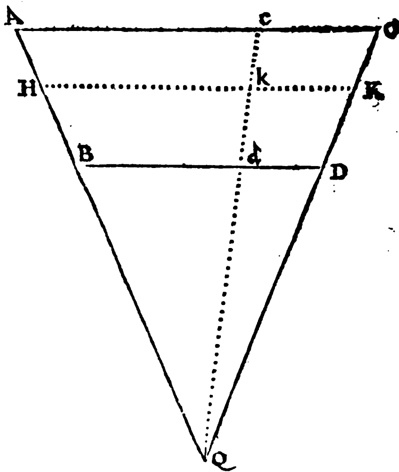
SI rectæ duæ positione datæ *AC*, *BD* ad data puncta *A* & *B* terminentur, datamque habeant rationem ad invicem, & recta *CD* qua puncta indeterminata *C*. *D*. junguntur secetur in ratione data in *K*, dico quod punctum *K* locabitur in recta positione data.

Concurrant enim rectæ (si non sint parallelæ) *AC* & *BD* in puncto *E*; & in *BE* capiatur *BG*, ad *AE*,



ut est *BD*, ad *AC*: Sitque *FD* æqualis *EG*. Et erit *EC*, ad *GD*, hoc est, ad *EF*; ipsi *GD* ex hypothesi æqualem, ut *AC*, ad *BD*, adeoque in ratione data; &

propterea dabitur specie triangulum *EFC*, (ex datis nimirum angulo *CEF*, & laterum *EC*, *EF* circa eundem angulum ratione.) Secetur *CF* in *L* in ratione illa data, & dabitur etiam specie triangulum *EFL* (ob datam laterum circa datum angulum *EFC* rationem) & proinde punctum *L* locabitur semper in recta *EL* positione data. Junge *LK*; & ob datam *FD*, utpote ipsi *EG* datæ æqualem; & datam rationem *LK* ad *FD*, eam nempe *CK* ad *CD*, dabitur *LK*. Huic æqualis capiatur *EH*; & erit *ELKH* parallelogrammum. Est enim *LK* ipsi *FD* parallela, & per consequens ipsi *EH* ejusdem lineæ protractæ parti parallela, & ex hypothesi æqualis: Locatur ergo punctum *K* in parallelogrammi latere positione dato *HK*. *Q.E.D.* Sin rectæ *AC*, *BD* sint inter se parallelæ, punctum concursus erit infinite distans, hoc est nullum; & omnes lineæ *EC*, *EL*, *HK*, *ED* erunt inter se parallelæ. Quo in casu hoc Lemma ita demonstramus. Junguntur puncta, lineas *AC* & *BD* datam rationem habentes, terminantia lineis *AB*, *CD*; & protractis jungentibus donec concurrant, puta in *Q*, per punctum *K* lineam *CD* in ratione data dividens ducatur *HK*, ipsis *AC* & *BD* parallela: Dico punctum *K* locari in recta *HK* positione data. Ubicunque enim sumuntur puncta *C* & *D* in lineis *AC* & *BD*, linea eadem puncta conjungens ad idem punctum *Q* tendet, ut in punctis *c* & *d*, & linea jungens *cd* in data illa ratione secabitur a linea *HK*: Est enim ex hypothesi & in hac figura *Ac* ad *Bd* ut *AC* ad *BD*:



BD: Eſt etiam ex hac hypotheſi & in hac figura *ck* ad *cd* ut *CK* ad *CD:* Unde liquet & in hoc caſu punctum *K* ſemper locari in recta poſitione data. *Q. E. D.*

Coroll. (1.) Si puncta duo progrediantur uniformi cum motu in lineis rectis, & diſtantia eorum dividatur in ratione data, punctum dividens locabitur in recta poſitione data; & punctum illud, ut *K*, movebitur uniformiter in iſta linea recta. Nam ob celeritatem utriuſque puncti uniformem & æquabilem Lineæ motus ut *AC* & *BD* quas ſimul deſcribunt erunt ſemper in ratione data, nimirum in ratione celeritatum utrinque æquabilium: Unde liquet è jam demonſtratis punctum *K* in linea recta *HK* ſemper ferri. Quod vero uniformiter & æquabili motu feratur, hoc modo demonſtrabitur: *HK* ſemper eſt æqualis *EL*, & *EL* eadem ratione creſcit ac creſcunt ipſi proportionales *EC* & *EF* lineæ, quæ iis *AC* & *BD* per quas corpora ſimul moventur ſunt ex prius dictis etiam proportionales. Eſt itaque *EC*, ad *EF*, ut *AC*, ad *BD*; unde cum iſtæ lineæ ex motus æquabilitate creſcunt uniformiter, etiam *EL* & ei æqualis *HK* iiſdem proportionalis uniformiter etiam creſcet; ſive, quod perinde eſt, punctum *K* motu æquabili & uniformi per lineam *HK* feretur. *Q. E. D.* Et pariter in caſu ſecundo ubi lineæ motus parallelæ ponebantur. Nec opus eſt ut in re facillima verba addamus. In loco etiam ſolido ſimili fere demonſtratione Lemmatis veritas colligetur, demittendo nimirum ad planum termedium per punctum quodvis *K*, & alterum in eadem ratione minimam linearum diſtantiam ſecans & eidem diſtantiæ normale perpendiculares, & vice linearum motus in diverſis planis poſitarum adhibendo, lineas, perpendiculares dimiſſas jungentes, & in eodem plano poſitas, ut demonſtratio in hac propoſitione adhibita iſti caſui applicari poſſit.

Coroll. (2.) Si puncta utraque in eandem partem progrediantur, etiam & punctum dividens in eandem partem progredietur: Si punctorum alterum in hanc, al-

terum vero in contrariam partem moveatur, punctum dividens aut in hanc aut in contrariam partem tardius movebitur; prout celeritatis majoris, aut a puncto K distantiæ rationes postulaverint. Vel demum, si rationes istæ sint æqualitatis, & in neutram partem prævaleant, punctum dividens in neutram partem movebitur, sed omnino quiescet. Unde in omni casu punctum istud dividens K aut quiescet, aut movebitur uniformiter in linea recta.

(25.) Commune centrum gravitatis systematis corporum ab actionibus corporum inter se, (sive attractiones sint, sive impulsus) non mutat statum suum vel motus vel quietis; & propterea corporum omnium in se mutuo agentium (exclusis actionibus & impedimentis aut externis, aut aliunde arcessitis) Commune centrum gravitatis vel quiescit, vel movetur uniformiter in directum.

Nam si duo corpora vel puncta ut C. D. progrediantur uniformi cum motu in lineis rectis AC. BD, & eorum distantia $C D$ dividatur in ratione data; (uti linea per corporum motorum centra gravitatis semper transiens a communi utriusque gravitatis centro K, in ratione data, nimirum corporibus reciproca, dividitur) commune illud gravitatis centrum K aut quiescet, aut movebitur uniformiter in linea recta KH. Ergo si corpora quotcunque moveantur uniformiter in lineis rectis, commune centrum duorum quorumvis vel quiescit, vel progreditur uniformiter in linea recta; propterea quod linea horum corporum centra in rectis uniformiter progredientia jungens dividitur ab hoc communi duorum gravitatis centro in ratione data. Similiter & commune centrum gravitatis horum duorum & tertii cujusvis vel quiescit, vel progreditur uniformiter in linea recta; propterea quod ab eo dividitur distantia gtavitatis centri communis corporum duorum & centri corporis tertii in data ratione, corpori nempe & systemati duorum corporum reciproca: Nam commune gravitatis centrum duorum in recta uniformiter progreditur, atque adeo

Vid. Fig. p. 69. & Fig. p. 70.

pari

pari ratione ac centrum cujusvis corporis est habendum. Eodem modo commune centrum gravitatis horum trium & quarti cujusvis vel quiescit vel progreditur uniformiter in linea recta; propterea quod ab eo dividitur distantia inter centrum gravitatis commune trium, & centrum gravitatis quarti in data ratione, corpori nempe & systemati trium corporum reciproca: & sic porro in infinitum. Igitur in systemate corporum, quæ actionibus in se invicem aliisque omnibus in se extrinsecus impressis omnino vacant, adeoque vel quiescunt, vel moventur singula uniformiter in rectis singulis, commune omnium centrum gravitatis vel quiescit, vel movetur uniformiter in directum. Porro in systemate duorum corporum in se invicem agentium, cum distantiæ centrorum utriusque a communi amborum gravitatis centro sint reciproce ut corpora, erunt motus relativi corporum eorundem sive ex attractione, seu vi centripeta; sive impulsu, seu vi centrifuga accedendi ad centrum illud vel ab eodem centro recedendi æquales inter se, & velocitas accessus vel recessus corporibus reciproce proportionales; hoc est distantiis a centro gravitatis amborum directe proportionales. Unde ex istis actionibus augebitur vel minuetur distantia ab illo centro proportionaliter: Proindeque centrum illud a motuum æqualibus mutationibus in partes contrarias factis, atque adeo ab actionibus horum corporum inter se, sive se mutuo trahant sive fugent, nec promovetur, nec retardatur, nec mutationem patitur in statu suo quoad motum vel quietem. In systemate autem corporum plurium, quoniam duorum quorumvis in se mutuo agentium commune gravitatis centrum ob actionem illam nullatenus mutat statum suum, & reliquorum, quibuscum actio illa intercedit, commune gravitatis centrum nihil inde patitur, distantia autem horum duorum centrorum dividitur a communi corporum omnium centro in partes, summis totalibus corporum quorum sunt centra gravitatis, reciproce proportionales; adeoque centris illis duo-

bus

bus ſtatum ſuum movendi vel quieſcendi ſervantibus, commune omnium centrum gravitatis ſervat etiam ſtatum ſuum; manifeſtum eſt quod commune illud omnium centrum ob actiones binorum corporum inter ſe nunquam mutat ſtatum ſuum quoad motum & quietem. In tali autem omnium ſyſtemate actiones omnes corporum inter ſe vel inter bina ſunt corpora, ubi nihil ſtatus centri gravitatis ſyſtematis mutatur; uti jam vidimus; vel ab actionibus inter bina compoſitæ, & propterea communi omnium gravitatis centro mutationem in ſtatu motus ſui vel quietis nunquam inducent. Nam ſi ab Actione *A* in *B* ſtatus centri gravitatis nihil perturbetur, & ab actione *C* in *B* nihil perturbetur; neque ſane a conjunctis *A* & *C* actionibus in *B* ſtatus ille centri gravitatis perturbabitur. Quare cum centrum illud commune gravitatis ubi corpora non agunt in ſe invicem, vel quieſcit, vel in recta aliqua progreditur uniformiter, perget idem, non obſtantibus corporum actionibus inter ſe, vel ſemper quieſcere, vel ſemper progredi uniformiter in directum; niſi a viribus in ſyſtema extrinſecus impreſſis deturbetur de hoc ſtatu. Eſt igitur ſyſtematis corporum plurium lex eadem quæ corporis ſolitarii quoad perſeverantiam in ſtatu motus vel quietis. Motus enim progreſſivus ſeu corporis ſolitarii, ſeu ſyſtematis corporum ex motu centri gravitatis æſtimari ſemper debet.

Octob. 30. 1704.

VIII.

(26.) CORPORUM dato ſpatio incluſorum, & proinde motum ipſius participantium iidem ſunt motus inter ſe ſive ſpatium illud quieſcat, ſive moveatur idem uniformiter in directum, abſque motu circulari.

Nam

Nam differentiæ motuum tendentium ad eandem partem, & summæ tendentium ad contrarias eædem sunt sub initio in utroque casu (ex hypothesi,) & ex his summis vel differentiis oriuntur congressus & impetus, quibus corpora se mutuo feriunt. [ex summis nimirum in corporum ad partes contrarias tendentium, & ex differentiis in corporum ad easdem partes tendentium occursibus.] Ergo per Legem 4. æquales erunt congressuum effectus in utroque casu, & propterea manebunt motus inter se in uno casu æquales motibus inter se in altero. Communis enim spatii corporumque inclusorum & uniformis motus in eandem plagam tendens, aut omnia æqualiter accelerando, ut in iis quæ in eandem cum spatio partem tendunt; aut quantum uni detrahit, addendo alteri, ut in iis quæ in partes contrarias tendunt, nullatenus mutabit occursuum vires. Idem comprobatur experimento luculento; motus enim omnes eodem modo se habent in navi, sive ea quiescat, sive moveatur uniformiter in directum.

(27.) Si corpora moveantur quomodocunque inter se, & a viribus acceleratricibus æqualibus secundum lineas parallelas urgeantur, pergent omnia eodem modo moveri inter se ac si viribus illis non essent incitata.

Nam vires illæ æqualiter, pro quantitatibus movendorum corporum, & secundum lineas parallelas agendo, corpora omnia æqualiter quoad velocitatem movebunt; adeoque nunquam mutabunt positiones & motus eorum inter se.

Lemma ad Experimenta proxime memoranda.

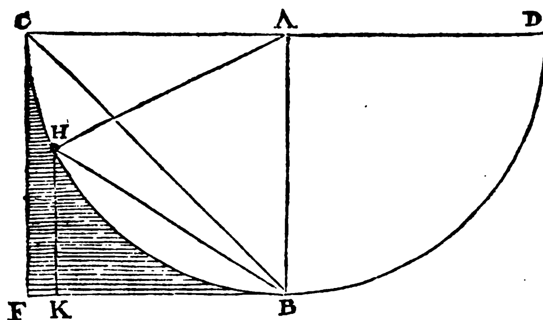
Velocitas corporis penduli in puncto circuli descripti infimo est semper ut Chorda arcus quẽ cadendo descripsit.

Esto angulus *CAB* rectus, *C* vel *H* mobile filo eodem *CA* vel *HA* a centro *A* suspensum, & per arcum *CB* vel *HB* descensurum; Dico quod velocitas Corporis *C* in puncto infimo *B*, est ad velocitatem corporis *H* in eodem puncto, sive potius velocitas ejusdem corporis primo per arcum *CB* & deinde per arcum *HB*

cadentis

cadentis, ut chorda *CB*, ad chordam *HB*. Est enim, ut mox demonstrabimus, velocitas * corporis per arcum *CB* decidentis, in puncto infimo *B*, (qua nimirum corpus pergeret moveri secundum lineam rectam circulum in *B* tangentem, si in *B* filum relinqueret,) eadem atque ea quam haberet in puncto *F*, si perpendiculariter per *CF* decidisset. Et eadem ratione est velocitas corporis per arcum *HB* descendentis eadem atque ea quam haberet in puncto *K* si perpendiculariter per *HK* decidisset : [eadem nemper celeritate per spatia in-

* *Per Caroll.* 5. *Prop.* 6. *infra.*



ter parallela plana impressa, sive transitus per eadem plana sit perpendicularis, ut in corporibus cadentibus per lineas rectas horizonti perpendiculares; sive sit obliquus, ut in corporibus pendulis arcus circulares describentibus, uti inferius patebit plenius.] Est itaque Velocitas Corporis per arcum *CB* descendentis, ad velocitatem corporis per arcum *HB* descendentis, ut Velocitas corporis per *CF* decidentis, ad velocitatem corporis per *HK* decidentis. Sed est † velocitas corporis per *CF* decidentis, ad velocitatem corporis per *HK* decidentis, in subduplicata ratione lineæ *CF* ad lineam *HK*, uti infra demonstrabitur : & est quoque * Chorda *CB*, ad Chordam

† *Per Coroll. Prop.* 4. *infra.*

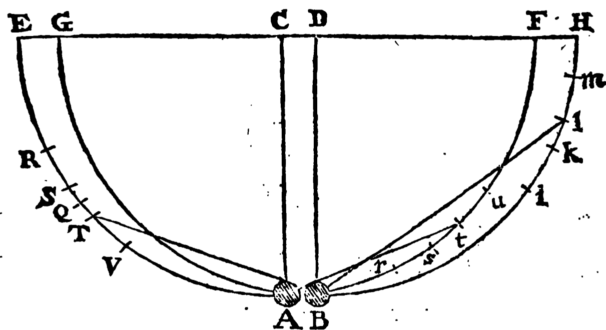
* *Per Prop.* 2. *infra.*

dam *HB*, in eadem ſubduplicata ratione lineæ *CF*, ad lineam *HK*; uti infra quoque demonſtrabitur. Unde ſequitur, Velocitatem Corporis per arcum *CB* deſcendentis, ad velocitatem corporis per arcum *HB*, deſcendentis, in puncto infimo *B*, eſſe ut eſt Chorda arcus *CB*, ad Chordam arcus *HB*. *Q. E. D.*

Corollarium. Hinc corrigendus eſt Cl. Hugenii, ſeu potius Editorum error, rationem velocitatis in puncto infimo *B* eandem eſſe ac ipſarum linearum *CF* & *HK* ſupponentium; cum ſit in earundem tantum ratione ſubduplicata; uti jamjam ex ipſius Hugenii principiis demonſtravimus.

De *Vi Centrifuga*. P. 426, 427.

Scholium Generale. Veritas harum legum olim comprobata fuit a Dno. Chriſtophero Wrenno per experimentum pendulorum, coram Societate Regali; quod etiam Cl. Mariottus libro integro exponere mox dignatus eſt. Verum ut hoc experimentorum genus cum Theoriis ad amuſſim congruat, habenda eſt ratio non tantum vis elaſticæ corporum pendulorum, ſed etiam & reſiſtentiæ aeris. Pendeant corpora *A* & *B* filis parallelis *AC* &



BD a centris *C* & *D*: His centris & intervallis æqualibus deſcribantur ſemicirculi *EAF GBH*, radiis *CA* & *DB* reſpective biſecti. Trahatur corpus *A* ad arcus *EAF* punctum quodvis *R*, & ſubducto corpore *B* demit-

demittatur inde, redeatque post unam oscillationem integram [ex itu & reditu compositam] ad punctum *V*. Est *RV* retardatio ex resistentia aeris. Hujus *RV* fiat *ST* pars quarta sita in medio, & sit *RQ* æqualis ipsi *QV*, & *ST* exhibebit retardationem in descensu ab *S* ad *A* quam proxime. Nam si in duplici tum ascensu tum descensu retardatio sit *RV*, erit retardatio in descensu uno vel uno ascensu ejus pars quarta; & cum arcus bini sint majores & bini minores quam arcus *QA*, resistentia aeris neque in arcubus maximis, neque in minimis sumenda est, sed in mediocri. Unde pars quarta *ST* neque ad punctum supremum *R*, neque ad infimum *V*, sed in medio inter utrumque est collocanda. Restituatur jam corpus *B* in locum suum: Cadat corpus *A* de puncto *S*, & velocitas ejus in loco reflexionis *A* absque errore sensibili, tanta erit ac si in vacuo de loco *T* cecidisset; corpore *A* altius paulo cadendo aeris resistentiam compensante: Exponatur itaque juxta Lemma jam demonstratum hæc corporis in puncto *A* velocitas per chordam arcus *TA*. Post reflexionem perveniat corpus *A* ad locum *s*, & corpus *B* ad locum *k*, sive elastica sint corpora, sive non. Tollatur corpus *B*, & inveniatur locus *u* a quo si corpus *A* demittatur, & post unam integram oscillationem ad locum *r* redeat, sit *st* pars quarta ipsius *ru*, sita etiam ut prius in medio: Et per chordam arcus *tA* exponatur velocitas quam corpus *A* proxime post reflexionem habuit in loco *A*: nam *t* erit ille locus verus & correctus ad quem corpus *A*, sublata aeris resistentia, ascendere debuisset. Simili methodo corrigendus erit locus *k*, ad quem corpus *B* ascendit, & inveniendus locus *l* ad quem corpus illud ascendere debuisset in vacuo. Hoc pacto omnia hujusmodi experimenta licet perinde experiri ac si in vacuo constituti essemus. Tandem ducendum erit corpus *A* in chordam *TA*, quæ velocitatem ejus exhibet, ut habeatur motus ejus in loco *A* proxime ante reflexionem; deinde in chordam *tA*, ut habeatur motus ejus in loco

A proxime

A proxime post reflexionem; & sic corpus *B* ducendum erit in chordam *Bl*, ut habeatur motus ejus proxime post reflexionem, & simili methodo ubi corpora duo simul demittuntur de locis diversis, inveniendi sunt motus utriusque tam ante quam post reflexionem, & tum demum conferendi sunt motus inter se, & colligendi effectus reflexionis. Hoc modo in pendulis pedum decem rem tentando, idque in corporibus tam inæqualibus quam æqualibus, & faciendo ut corpora de intervallis amplissimis, puta pedum octo, duodecim, vel sedecim, concurrerent, reperit semper Cl. Newtonus, sine errore trium digitorum in mensuris, ubi corpora directe sibi mutuo occurrebant, quod in partes contrarias mutatio motus erat æqualiter corpori utrique illata, atque adeo quod actio & reactio, juxta legem 3^m^. semper erant æquales. Ut si corpus *A* incideret in Corpus *B* quiescens cum novem partibus motus, & amissis inter collidendum septem partibus, pergeret post reflexionem cum duabus; Corpus *B* resiliebat cum partibus istis septem. Si corpora obviam irent, *A* cum duodecim partibus, & *B* cum sex, & rediret *A* cum duabus, redibat *B* cum octo; facta nimirum subductione partium quatuordecim utrinque. De motu ipsius *A* subducantur partes duodecim, & restabit nihil; subducantur aliæ duæ partes, & fiet motus duarum partium in plagam contrariam. Et sic de motu corporis *B* partium sex, subducendo partes quatuordecim, fient partes octo in plagam contrariam. Quod si corpora irent ad eandem plagam, *A* velocius cum partibus quatuordecim, & *B* tardius cum partibus quinque, & post reflexionem pergeret *A* cum quinque partibus, pergebat *B* cum quatuordecim, facta translatione partium novem de corpore *A* in corpus *B*; & sic in reliquis. A congressu & collisione corporum nunquam mutabatur quantitas motus quæ ex summa motuum conspirantium, & differentia contrariorum colligebatur. Namque error digiti unius & alterius in mensuris difficultati singula satis accurate

curate peragendi est omnino tribuendus. Difficile erat tum pendula simul dimittere, sic ut corpora in se mutuo impingerent in loco ipso infimo *A B*; tum loca *s* & *k* notare ad quæ corpora ascendebant post concursum; sed in ipsis pilis, quibus utendum erat, inæqualis partium densitas, & textura aliis de causis irregularis errores aliquales ut inducerent erat necesse. Porro nequis objiciat regulam ad quam probandam inventum est hoc experimentum præsupponere corpora vel absolute dura esse, vel saltem perfecte elastica, cujusmodi nulla forte reperiuntur in compositionibus naturalibus, addimus quod experimenta jam descripta succedunt in corporibus mollibus æque ac in duris vel elasticis, nimirum a conditione duritiei vel elaterii neutiquam pendentia. Nam si conditio illa in corporibus non perfecte duris vel elasticis tentanda est, debebit solummodo reflexio minui in certa proportione pro quantitate vis elasticæ diminutæ. In Theoria Wrenni & Hugenii corpora absolute dura redeunt ab invicem cum velocitate congressus relativa: Sed cum Cl. Wallisio omnino dicendum hoc in perfecte elasticis tantum obtinere; & alias prorsus in corporibus non elasticis, sive mollibus, sive duris, quam in elasticis leges valere asserendum; prout ex olim expositis est abunde manifestum. Speciatim vero corpora illa solum quæ sunt perfecte elastica post collisiones mutuas redeunt ab invicem cum velocitate congressus, secundum motus Legem 16^{m}. eodem spectantem, prout in prioribus exposuimus. In imperfecte elasticis velocitas reditus minuenda est simul cum vi elastica, & in ejusdem diminutæ ratione, propterea quod vis illa elastica (nisi ubi partes corporum ex congressu læduntur, vel extensionem aliqualem quasi sub malleo patiuntur) videtur esse in se certa & determinata, faciatque corpora redire ab invicem cum velocitate relativa quæ sit ad velocitatem relativam concursus in data ratione. Id in pilis ex lana arcte conglomerata & fortiter constricta sic tentavit Newtonus: Primum demittendo

pendula

pendula & mensurando reflexionem invenit quantitatem vis elasticæ; deinde per hanc vim calculo determinavit reflexiones in aliis concursuum casibus expectandas, & respondebant experimenta. Redibant semper pilæ ab invicem cum velocitate relativa quæ esset ad velocitatem relativam concursus ut numerus quinarius ad novenarium. Pilæ ex chalybe fere erant perfecte elasticæ, redibant enim propemodum cum velocitate concursus; aliæ ex subere cum paulo minore: in vitreis autem proportio erat ut quindecim ad sedecim circiter. Atque hoc pacto Lex quinta quoad ictus & reflexiones per Theoriam Wallisianam comprobata est: quæ cum experientia plane congruit. In attractionibus etiam obtinere hanc regulam, quod scilicet quantitas motus quæ colligitur capiendo summam motuum factorum ad eandem partem, & differentiam factorum ad contrarias non mutatur ab actione corporum inter se, breviter hoc in loco ostendebat Newtonus, cujus in hac causa ratiocinium olim sub Lege quinta expendimus; atque adeo idem impræsentiarum missum faciemus, & ad reliqua hic loci à Newtono observata accedemus. Ut itaque corpora in concursu & reflexione idem pollent quorum velocitates sunt reciproce ut vires insitæ, sive ipsa corpora, uti ex Lege 8ª. & 17ª. & Hugenii Propositione 8va intelligi potest, sic in movendis instrumentis mechanicis agentia idem pollent, & conatibus contrariis se mutuo sustinent, quorum velocitates, secundum determinationem virium æstimatæ, sunt reciproce ut vires: Sic pondera æquipollent ad movenda brachia libræ quæ oscillante libra sunt reciproce ut eorum velocitates sursum & deorsum; hoc est, pondera si recta ascendunt & descendunt æquipollent sibi invicem quæ sunt reciproce ut punctorum à quibus suspenduntur distantiæ ab axe libræ. Sin planis obliquis aliisve admotis obstaculis impedita ascendunt vel descendunt oblique, pondera æquipollent quæ sunt ut ascensus & descensus, quatenus facti secundum perpendiculum, idque

adeo ob determinationem gravitatis deorsum. Simili[ter]
in Trochlea seu Polyspasto vis manus funem direc[te]
trahentis, quæ sit ad pondus vel directe vel obliq[ue]
ascendens, ut velocitas ascensus perpendicularis, ad velo-
citatem manus funem trahentis, sustinebit pondus [in]
æquilibrio. In horologiis & similibus instrumentis, q[uæ]
ex rotulis commissis constructa sunt, vires contrariæ [ad]
motum rotularum promovendum & impediendum [si]
sunt reciproce ut velocitates partium rotularum in q[uas]
imprimuntur sustinebunt se mutuo. Vis cochleæ [ad]
premendum corpus, est ad vim manus manubrium cir-
cumagentis, ut circularis velocitas manubrii ea in p[arte]
ubi a manu urgetur, ad velocitatem progressivam
cochleæ versus corpus pressum. Vires quibus cune[us]
urget partes duas ligni fissi, est ad vim mallei in c[u-]
neum, ut progressus cunei secundum determinatio[nem]
vis a malleo in ipsum impressæ, ad velocitatem qua p[ar-]
tes ligni cedunt cuneo secundum lineas faciebus cu[nei]
pependiculares: & par est ratio machinarum omniu[m.]
Harum efficacia & usus in eo solo consistit ut dimi[nu-]
endo velocitatem, augeamus vim, & contra. U[nde]
solvitur in omni aptorum instrumentorum genere Pro-
blema illud decantatum, *Datum pondus data vi quan-*
que movendi, aliamve datam resistentiam vi data qu[an-]
tulacunque superandi. Nam si machinæ ita formentur
velocitates agentis & resistentis sint reciproce ut vir[es,]
Agens resistentiam sustinebit, & majori cum veloci-
tum disparitate eandem vincet: Certe si tanta sit ve-
locitatum disparitas ut vincatur etiam resistentia om[nis]
quæ tam ex contiguorum & inter se labentium corpo-
rum attritione, quam ex continuorum & ab invicem se-
parandorum cohæsione, & elevandorum ponderibus ori[ri]
solet, superata omni ea resistentia vis redundans acce[le-]
rationem motus sibi proportionalem partim in partibus
machinæ, partim in corpore resistente producet. Cæ-
terum mechanicam tractare non est hujus instituti: His
autem saltem ostendimus quam late pateat, quamqu[e]
certa

certa sit lex motus quinta prius exposita. Nam si æstimetur Agentis actio ex ejus vi & velocitate conjunctim, & resistentis reactio ex ejus partium singularum velocitatibus & viribus resistendi, ab earum attritione, cohæsione, pondere, & acceleratione oriundis, erunt actio & reactio in omni instrumentorum usu sibi invicem semper æquales; & quatenus actio propagatur per instrumentum, & ultimo imprimitur in corpus omne resistens, ejus ultima determinatio determinationi reactionis semper erit contraria.

Corollarium. Ex veris hisce motuum legibus jam satis illustratis & probatis, apparent plus satis crassi Cartesii de iisdem errores. Cujus leges motuum tantum abest quod cum veris legibus ubique congruant, ut potius è contra ab iisdem ubique fere discrepare deprehendantur. Nec mirum proinde, si in reliquis naturæ phænomenis pariter hallucinatus fuerit. Expositis jam motuum Legibus, ad Propositiones est deveniendum.

Novemb. 6. 1704.

IX.

PROPOSITIONES.

I. RATIO ultima tangentis & subtensæ seu chordæ ad arcum curvilineum eisdem competentem, ubi arcus quam minimus vel evanescens accipitur, est in ratione æqualitatis; hæc est tangens, arcus, & chorda in unam & eandem lineam desinunt sive coalescunt. Et idem de sinu est intelligendum. In figura præsente sit *Ab* arcus circuli vel alterius curvæ quam minimus; sit *Af* tangens ejus, & *Ab* subtensa; scire itaque velim, quænam sit harum linearum ad invicem ratio, si ad punctum *A* quam proxime sumantur, sive ubi punctum *b* cum puncto *A* quasi coalescit: & dico, quod arcus

ratio ſive ad tangentem ſupra, ſive ad ſubtenſam infra ſit ratio æqualitatis. Etenim ex natura curvarum liquet omnem inter tangentem & ſubtenſam arcus cujuſvis differentiam a longitudine arcus intermedii oriri, & eo ſemper majorem eſſe differentiam, quo arcus major accipitur, eo minorem quo arcus minor accipitur; unde ſequitur quod in arcu quam minimo erit quam minima differentia, & in arcu infinite parvo, qualem nunc volumus, erit differentia infinite parva, ſive nulla. Et ſi differentia inter tangentem & ſubtenſam ſit nulla, multo magis nulla erit inter tangentem & arcum intermedium, ſive inter ſubtenſam & arcum intermedium differentia, cum arcus iſte ſit longitudinis inter tangentem & ſubtenſam ubique intermediæ. Et hanc ſubtenſarum, arcuum, & tangentium, quin & ſinuum minimorum æqualitatem omnis Geometrarum ætas ſuppoſuit & agnovit, dum curvarum figurarum perimetros tanquam polygonorum latera innumera, ubi inſcriptæ & circumſcriptæ figuræ, evaneſcente differentia, coaleſcerent, conſiderarunt.

Corol-

Corollarium. Si itaque demonſtratum fuerit angulorum contactus ſubtenſas *db DB* eſſe inter ſe ſemper in ratione ſubtenſarum *Ab AB* duplicata, uti ſtatim demonſtrabitur, exinde quoque ſequetur eaſdem ſubtenſas evaneſcentes eſſe etiam in ipſorum arcuum conterminorum *Ab AB* vel ſinuum *cb CB* ratione duplicata, quoniam ſubtenſa *Ab* cum arcu *Ab* vel ejuſdem ſinu *cb*, & ſubtenſa *AB* cum arcu *AB* vel ejuſdem ſimul *CB* eo in caſu omnino coincidit & coaleſcit; uti jamjam oſtendimus.

II. Angulorum contactus in circulis Subtenſæ ſunt ſemper in duplicata ratione ſubtenſarum arcuum conterminorum.

Sint apud figuram eandem arcus duo quilibet *AB* & *Ab*; ſubtenſæ anguli contactus, tangenti perpendiculares, *DB* & *db* (æquales nempe ſinubus verſis eorundem arcuum *AC* & *Ac*;) ſubtenſæ ſive chordæ arcuum etiam *AB* & *Ab*: His arcuum ſubtenſis lineæ a puncto *G* ductæ *GB* & *Gb* erunt * perpendiculares, compleantur rectangula *ADBC* & *Adbc*. Eſt autem *AB* quadratum † æquale rectangulo *AG* in *AC* vel *DB*; & pariter eſt *Ab* quadratum æquale rectangulo *AG* in *Ac* vel *db*. Atque adeo eſt ratio *AB* quadrati, ad *Ab* quadratum, eadem quæ rectanguli *AG* in *DB*, ad rectangulum *AG* in *db*, hoc eſt * eadem quæ lineæ *DB*, ad lineam *db*. *Q.E.D.*

* III. 31. *Elem.*

† VI. 8. *Elem.* *cum* VI. 17. *Elem.*

* VI. 1. *Elem.*

Corollarium. Eſt itaque ſubtenſa anguli contactus quævis *DB* vel *db* æqualis chordæ quadrato, ad circuli diametrum applicato. Eſt enim ut *AG* ad *AB*, ita *AB* ad *AC* vel *DB*; unde per auream regulam $BD = \frac{AB \times AB}{AG}$, ſive $= \frac{ABq}{AG}$. Et pariter *AG* ad *Ab*, ut *Ab* ad *Ac* vel *db*; unde $db = \frac{Abq}{AG}$. *Q.E.D.*

Coroll. (2.) In minimis lentium ſegmentis altitudines ſeu axes ſegmentorum *AC* & *Ac* eandem inter ſe rationem habere cenſendæ ſunt quam baſium ſive aperturarum *Eb* & *RB*, &c. quadrata. Eandem enim rationem habere *AC* & *Ac* oſtendimus quam habent ſubtenſarum quadrata; & cum in arcubus perexiguis ſubtenſæ vel ſinus eorumve dupla *RB* & *Eb* ſint fere inter ſe in eadem ratione, ſequitur & altitudines *AC* & *Ac* eandem fere rationem habere quam habent ſinuum duplorum *RB* & *Eb*, hoc eſt, aperturarum quadrata. *Q.E.D.*

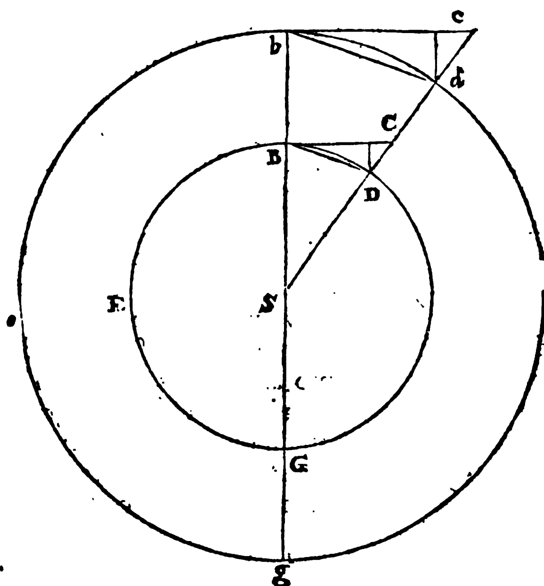
Vid. Fig. p. 84.

Coroll. (3.) In angulis perexiguis exceſſus ſecantium ſupra radium ſunt etiam ut ſubtenſarum vel ſinuum, vel tangentium, vel etiam arcuum quadrata quam proxime. Exceſſus enim iſti *bf* & *BF* in iſto caſu cum ſubtenſis anguli contactus *bd* & *BD* quaſi coincidunt; atque adeo eandem fere cum iis rationem obtinent inter ſe. Sic ſane apud ſecantium tabulas videre eſt quod poſito radio circuli partium æqualium 10.000.000 exceſſus ſecantis minutorum duorum primorum eſt partium duarum, & exceſſus ſecantis minutorum qua[illegible] primorum eſt partium octo: unde ſecantis priori[illegible] differentia, eſt differentiæ ſecantis poſterioris a[illegible] & radii quadrupla; hoc eſt differentiæ iſta[illegible] ſe ut arcuum quadrata, & ſic fere in reliqui[illegible]

Vid. Fig. p. 84.

Coroll. (4.) Subtenſæ evane[illegible] uli contactus
fun[illegible] no in ratione duplic[illegible] contermino-
r[illegible] enim ex prius d[illegible] ubique in ra-
t[illegible] rum duplicata: S[illegible] ordæ in arcus
[illegible] nt, hoc eſt, in[illegible] infinite parvis
[illegible] oincidant, & [illegible] ntur, ut ſupra
[illegible] s, ſubtenſæ i[illegible] ratione hoc i[illegible]
c[illegible] ipſorum arc[illegible] a.
[illegible] Unde quo[illegible] caſu ex [illegible]
lar[illegible] oſitionis p[illegible] btenſa ev[illegible]
ang[illegible] æqualis [illegible] quadrato
culi[illegible] pplic[illegible]

Coroll. (6.) Hinc colligitur nobile illud & fundamentale Newtoni, quin & Hugenii Theorema; Quod scilicet in circulari corporis motu vires centripetæ, sive gravitates in centrum sunt ubique ut arcuum simul descriptorum, vel velocitatum quadrata, applicata ad circulorum diametros vel radios. Describant nempe corpora *B* & *b* in circumferentiis circulorum *BD* ad *bd* gyrantia simul, & eodem dato tempore, arcus quam mi-



nimos *BD* & *bd*: Quoniam sola vi insita describerent tangentes *BC* & *bc* hisce arcubus æquales, per legem motus primam, manifestum est, quod vires centripetæ sunt quæ perpetuo retrahunt corpora de tangentibus ad circumferentias circulorum, atque adeo hæ sunt ad invicem in ratione prima linearum nascentium *CD* & *cd*; hoc est, ut $\frac{BDq}{BG}$ ad $\frac{bdq}{bg}$; vel sumptis divisorum di-

midiis, ut $\frac{BDq}{BS}$ ad $\frac{bdq}{bS}$. & ob tempora periodica in arcuum ſimul deſcriptorum ratione reciproca, erunt vires illæ ut temporum periodicorum quadrata ducta in circulorum radios. Sin circuli ſint inter ſe æquales, ob datas diametros, vires iſtæ erunt inter ſe ut ipſa arcuum ſimul deſcriptorum vel velocitatum quadrata, uti olim plenius oſtendemus.

Prop. 10. *infra.*

Coroll. (7.) Præcedentis corollarii beneficio colligitur proportio vis centripetæ ad vim quamlibet notam, qualis eſt ea gravitatis. Nam cum vis illa quo tempore corpus percurrit lineam *B C*, ſive arcum eidem æqualem, impellat ipſum per lineam *CD*; quod ipſo motus initio æquale eſt quadrato arcus iſtius *B D* ad circuli diametrum applicato; & cum corpus omne vi eadem in eandem ſemper plagam continuata deſcribat ſpatia in duplicata ratione temporum, uti illico demonſtrabitur, vis illa quo tempore corpus revolvens arcum quemvis datum deſcribit efficiet ut corpus idem recta progrediens deſcribat ſpatium quadrato arcus illius ad circuli diametrum applicato æquale: adeoque eſt ad vim gravitatis ut ſpatium illud ad ſpatium quod grave cadendo eodem tempore deſcribit. Exempli gratia ex pendulorum experimentis, & aliis etiam modis conſtat corpora quæcunque in loco vacuo pedes Anglicos 16, 14. ſcrupulo ſecundo ex vi gravitatis cadendo deſcribere; ſcire velim quam rationem vires centripetæ, quibus Luna in orbita ſua retinetur, habeant ad vim noſtram gravitatis: quam ut obtinere queam arcus orbitæ Lunaris ſcrupulo ſecundo deſcripti quadratum per ejuſdem orbitæ diametrum eſt dividendum, ut lineam quam Luna, ſi motu circulari abrupto tanquam grave deſcenderet, interea deſcriberet, inveſtigemus. Diſtantia Lunæ mediocris à centro Telluris eſt circiter ſemidiametri terreſtris ſexagecupla, ſive pedum Anglicorũ 1257.696.000.

Prop. (4.) *infra.*

Ejus

Ejus proinde orbitæ circumferentia, ſi ad circularem reducamus, erit circiter pedum 7.897.834.380 : quam peripheriam cum Luna ſpatio menſis periodici, ſive ſpatio 27 dierum 7 horarum & 43 ſcrupulorum primorum, hoc eſt, ſecundis ſcrupulis 2.360.580 conficiat, dividatur circumferentia 7.897.834.380 per ſcrupula ſecunda eidem competentia 2.360.580, & Quotus 3.346 dabit longitudinem arcus à Luna ſcrupulo ſecundo deſcripti, pedibus nempe Anglicis exhibitam; cujus quadratum 11.128.976 per diametrum 2.515.392.000 diviſum exhibebit ⌊00.443 partes pedis Anglici Centimilleſimas, ſcrupulo ſecundo a Luna cadente deſcribendas, & ſcrupulo primo 16⌊1 pedes circiter; eſt ergo vis centripeta ſive gravitas Lunæ ad vim centripetam corporum apud nos in ſuperficie telluris ut ⌊00.443, partes Centimilleſimæ unius pedisad 16⌊1 pedes, hoc eſt, fere ut 1 ad 3.600. Atque adeo vis gravitatis verſus terram ad Lunæ diſtantiam eſt pars tantum termilleſima ſexcenteſima vis gravitatis apud nos.

III. Corporis, urgente quacunque vi uniformi accelerati, velocitates ſunt inter ſe ut tempora quibus vis illa uniformis imprimitur; hoc eſt, duplo tempore dupla velocitas, triplo tempore tripla velocitas, quadruplo quadrupla obtinebitur. Si enim vis accelerans ſit æquabilis & uniformis, ut hic ſupponitur, corpuſque adeo ſive prius quieſcat, ſive celeritate quacunque moveatur, & æquales perinde velocitatis gradus & augmentum æquale æquali tempore accipiat, manifeſtum eſt velocitatem corporis tempori eſſe ad amuſſim ubique proportionalem: ſi enim prima quavis temporis particula data certam quamvis velocitatem vis illa generare potuerit, conſimilem certe & æqualem velocitatem ſecunda æquali temporis particula generare poterit; conſimilem etiam & æqualem tertia æquali temporis particula generabit; atq; ita quarta, quinta, *&c.* temporis particula in infinitum. Unde

in-

integra velocitas erit ubique ut temporis spatium quo vis illa generans corpori imprimitur. *Q. E. D.*

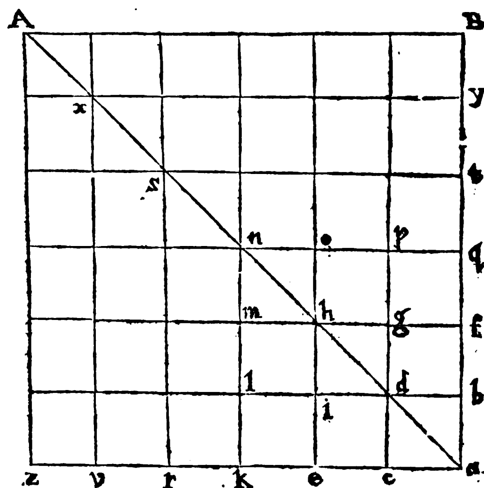
Corollarium. Cum itaque per experimenta constet, corpora quævis vi gravitatis accelerata velocitatis incrementa tempori proportionalia ubique sumere, liquet vim gravitatis uniformiter agere, atque corpora celerrime descendentia æque afficere atque quiescentia: Unde corporum gravitas nulli aeris pressioni, vel ætheris impulsui, vel materiæ cujusvis ad motum conatui mechanico ascribi debet. Omnes enim hujusmodi impulsus vel conatus corpus quiescens maxime urgerent, & quo celerius moveretur corpus, eo minus usque & usque urgere poterant, donec tandem celeritate genita impulsui generanti æquali facta, cessaret omnis impulsus, nec ulla motus acceleratio deinde sequeretur.

Lemmata ad Propositionem (4.)

(1.) NUmeri impares sibi continuo additi numeros omnes quadratos conficiunt. Sic unitas est imparium numerorum primus, & etiam quadratorum numerorum primus: Si autem numerus ternarius qui est imparium secundus unitati addatur, conficietur quaternarius, quadratorum secundus; si porro numerus quinarius imparium tertius quaternario hactenus acquisito addatur, conficietur novenarius, quadratorum tertius, & ita in infinitum. Hujus Lemmatis haud ignobilis demonstrationem duplicem afferemus, alteram è Taquetio, è penu proprio alteram. Tacquetius itaque sic

rem conficit, eſt, inquit, in progreſſione naturali imparium numerorum 1, 3, 5, 7, &c. ſumma tota æqualis quadrato numeri terminorum. Nam ex natura progreſſionis Arithmeticæ ſumma omnium terminorum æqualis eſt producto ex dimidio ſummæ extremorum in numerum terminorum ducto; atqui dimidia ſumma extremorum progreſſionis Arithmeticæ numerorum imparium ab unitate incipientium eſt par numero terminorum, (pergit enim ab unitate per binos, ubi terminorum numerus per ſingulos pergit) adeoque productum illud eſt quadratum numeri terminorum. Ergo eſt ſumma tota numerorum imparium ab unitate incipientium æqualis quadrato numeri terminorum. Q.E.D. Nos ſic demonſtramus. Sit *ac* vel *ab* unitas & *ad* unitatis quadratum; dico quod additio numerorum imparium 3, 5, 7, &c. neceſſaria eſt ad conficienda quadrata. *ab an as ax aA* numerorum omnium ab unitate procedentium, quadrato enim *ad* ſunt utrinque à binis lateribus addenda quadrata, nempe

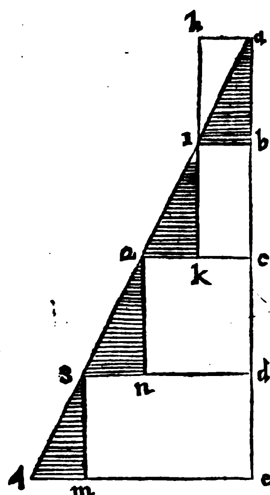
Arith. Pract. l. 5. C. 1. Theor. 7.



ed

ed & *df* & per diagonalem ad verticem alterum quadratum *ig* eſt addendum, unde ad conficiendum quadratum *ſecundum* ſive binarii numeri, addenda ſunt quadrata tria, ſive numerum imparem ſecundum. Deinde per omnes reliquos terminos augendi ſunt numeri quadratorum addititiorum binario, ſi quadrata reliqua ſunt conficienda; tria nempe quadrata tribus prius additis correſpondentia *ki* & *lh* & *gq*, ſunt primo addenda, dein aliud quadratum *hp*, eo quod quadratum juxta diagonalem additum bina quadrata correſpondentia ſuperaddi ſemper requirit, cui ultimo eſt addendum alterum diagonale quadratum *mo*. Et ita ubique: Numero addendorum ſemper ſe invicem binario ſuperante, quo quadrata *ad ah an as*, &c. omnia ab unitate cœpta perficiantur. Unde facile ſequitur continuam numerorum imparium additionem omnes numeros quadratos generare. *Q.E.D.* Qui vero inductione quantum libet continuata contentus abibit, hoſce demonſtrandi modos ſatis tuto omittere poterit; quanquam faciliores ſunt quam ut hic loci eoſdem judicarem prætermittendos.

Lemma Secundum. Si corpus dato tempore à quiete gradatim & uniformiter diſcedat, atque eo pacto certam lineam deſcribat, Idem corpus eodem dato tempore à celeritate ultimo acquiſita uniformiter continuata lineam prioris duplam deſcribet. Cum enim corpus à quiete diſcedendo certum velocitatis gradum augmentis æqualibus acquiſiverit, linea ab eodem deſcripta erit in innumeras lineas gradatim à quiete majores diſpeſcenda & ſi iſtæ lineolæ gradatim creſcentes non in longum ſed ad latera ordine diſponerentur, triangulum quoddam *ab* 1 componerent, aut ſaltem juxta indiviſibilium methodum Cavallerianam componere cenſendæ ſunt: Ubi punctum verticale trianguli *a*, punctum quietis, & baſis 1 *b* motus lineam ultimam deſignat, reliquæque lineolæ parallelæ diverſæ velocitatis lineas quas corpus pertranſierat. Jam ſi lineam maximam



1 *b* designatam eodem tempore plenario adhibitam fuisse posueramus, sive à puncto *a* ad basim 1 *b* à latere dispositam tot lineas maximæ æquales, quot prius gradatim majores disposueramus, composuissemus parallelogrammum, prioris nempe trianguli * duplum: Atque adeo motus uniformis quam à quiete gradatim acquisitus dato tempore est duplo major. *Q. E. D.*

* I. 41. Elem.

IV. Lineæ quas corpora urgente vi quacunque uniformi describunt sunt in ratione temporum duplicata; hoc est, si tempora sint minuta secunda unum, duo, tria, quatuor, quinque, &c. & ita ubique; erunt lineæ totæ descriptæ inter se ut unum, quatuor, novem, sedecim, viginti quinque, &c. qui numeri sunt priorum quadrati.

Nam si corpus quodcunque urgente vi quacunque uniformi minima aliqua temporis particula, puta minuto uno secundo, lineam aliquam cadendo describat, secunda æquali temporis particula, ob vim priori æqualem etiamnum continuatam, lineam alteram priori æqualem describet; & ob motum prius gradatim acquisitum in integrum jam per æquale tempus continuatum lineam etiam prioris † duplam describet; ex causis itaque utrisque inter se conjunctis lineam prioris triplam describet. Tertia vero temporis particula ob vim gravitatis etiamnum urgentem linea primæ æqualis describetur; & ob velocitatem prioris ad *b* duplam per tempus æquale continuatam describetur linea, prioris ab eadem causa profectæ

† Per Lem. 2.

fectæ, dupla, hoc est, primæ quadrupla; & ita ex viribus conjunctis linea jam descripta erit primæ quintupla; atque ita porro linea à continua gravitatis impressione primæ semper æqualis erit addenda, & altera linea primæ æqualis ob velocitatem una parte continuo auctam, atque adeo duæ partes sive lineæ, primæ æquales, qualibet vice erunt addendæ; atque adeo lineæ integræ quavis successiva temporis particula descriptæ erunt numeris imparibus in perpetuum designandæ. Cum itaque * numeri impares sibi additi quadratos omnes ordine conficiant, horum momentorum lineæ descriptæ simul additæ lineas integras momentorum, sive temporis particulas simul additas in ratione duplicata, sive in ratione quadrati numeri ad quadratum numerum necessario exuperantes conficient. Sic si minuto secundo corpora ex vi gravitatis ferantur deorsum per sedecim circiter pedes Anglicanos, uti experientia constat; duobus secundis per sexaginta quatuor pedes, & tribus per pedes centum quadraginta quatuor circiter deorsum ferentur.

* *Per Lem.* 1.

Vel sic, ex mente Galilæi, in *Systemate suo Cosmico* propositio demonstrabitur. Æqualia tempora per lineas æquales *ab bc cd de*, & velocitas in fine primi temporis per lineam *b* 1 exponatur: Cum vero velocitas ista quam eo loci habet corpus cadens non simul & semel sed certo temporis spatio per lineam integram *ab* exposito, ex continua & uniformi vi accelerante gradatim acquisita fuerit, uti jam diximus, itaque necesse est, ut reliquos omnes minores velocitatis gradus attigerit prius quam velocitatem *b* 1 acquireret; unde priores istæ velocitatis gradus per lineas minores à partibus temporis *ab* lineæque 1 *b* parallelas ductas exponentur; & cum † velocitas cum tempore uniformiter crescat, lineæ istæ juxta indivisibilium methodum triangulum

Vid. Fig. p. 93.

† *Prop.* 3. *supra.*

lum *ab* 1 conſtituent & component. Tota itaque linea quæ ab omnibus iſtis velocitatibus ſimul junctis deſcribetur, erit aggregato omnium iſtarum linearum, hoc eſt, ipſi triangulo *ab* 1 proportionalis; & per idem triangulum recte exponetur. Secundo vero tempore cum corpus jam acquiſierit velocitatem lineæ *b* 1 proportionalem, & per eandem expoſitam, ea ſola velocitate continuata deſcribet lineam lineæ prioris duplam, & per parallelogrammum proinde *ab* 1 *h* vel *b* 1 *kc* trianguli *ab* 1 duplum exponendam ; & inſuper velocitate nova, ut prius, à vi perpetuo & uniformiter urgente orta deſcribetur linea lineæ primæ æqualis ; & proinde per æquale triangulum 1 *k* 2 exponenda; ergo ſi vim utramque ſimul addas tempore ſecundo, linea deſcripta erit prioris tripla ; & per trapezium *b* 1 2 *c* exponenda ; & ſumma linearum primo & ſecundo tempore deſcriptarum, erit ad lineam primo tempore ſolo deſcriptam, ut triangulum *ac* 2 ad triangulum *ab* 1 ; hoc eſt, in duplicata ratione laterum homologorum *ac* & *ab* tempora exponentium, ſive ut temporum ipſorum quadrata. Pariter tertio tempore corpus celeritate hactenus acquiſita, ſive motus jam acquiſiti mera permanentia, lineam per parallelogrammum *c* 2 *nd* exponendam deſcribet; & vi addititia nova ex gravitate etiamnum uniformiter urgente orta lineam per triangulum 2 *n* 3 exponendam deſcribet. Unde linea tertio tempore deſcripta erit primæ quintupla, & per trapezium 2 *cd* 3 exponenda ; & ſumma linearum primo, ſecundo, & tertio tempore deſcriptarum, erit ad lineam primo tempore ſolo deſcriptam, ut triangulum *ad* 3 ad triangulum *ab* 1, ſive ut temporum *ad* & *ab* quadrata, & ita porro in infinitum. *Q. E. D.*

Corollarium. Cum ex prius demonſtratis celeritas ſit ubique tempori proportionalis, & cum lineæ à corporibus decidentibus deſcriptæ ſint in temporum ratione duplicata, ſive ut quadrata temporum, erunt etiam eædem lineæ in celeritatum ratione duplicata, ſive ut quadrata velocitatum : Sic, exempli gratia, ſi duorum

cor-

corporum cadentium in terram velocitates ultimo acquisitæ sint inter se ut numerus binarius est ad unitatem, erunt casus altitudines inter se ut numerus quaternarius ad unitatem. Si unius velocitas sit alterius velocitatis tripla, erit ejusdem descensus altitudo, alterius altitudinis noncupla, & ita porro in infinitum.

Novemb. 13. 1704.

X.

V. SI corpus celeritate ea quam in fine descensus acquisivit sursum tendere cœperit, ad eandem altitudinem eodem tempore ascendet unde prius descenderat; & velocitatem suam æqualibus temporibus æqualiter amittet.

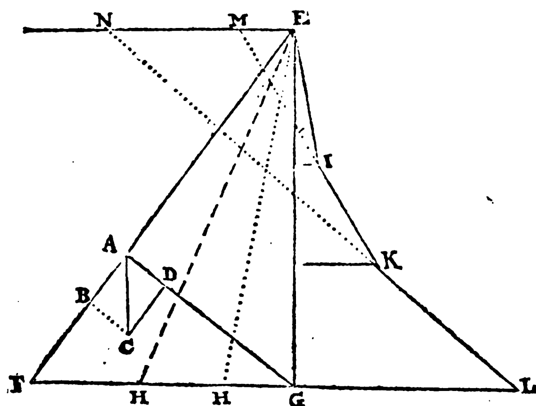
Nempe ex vi demonstratorum in propositione postrema velocitas semel acquisita ut 3*d* parallelogrammum, sive descendendo sive ascendendo, æquale prorsus semper describet; sed cum nova vis gravitatis in descensu adauget istud parallelogrammum triangulo 3*m*4 & idem in ascensu æquali triangulo diminuit, liquet trapezium jam ascendendo describendum idem fore cum parallelogrammo in descensu prius descripto; 32*cd*, atque ita porro: Unde lineæ descriptæ hisce trapeziis proportionales, & velocitates istorum trapeziorum basibus proportionales, erunt ubique datis temporibus eædem in ascensu quæ prius in descensu fuerant; donec tandem corpus ad punctum *a* ascensus ultimum eodem tempore pertingat, quo ab eodem prius descenderat. *Q. E. D.*

VI. Celeritates gravium super diversis planorum inclinationibus descendendo acquisitæ æquales sunt, si planorum elevationes sive altitudines perpendiculares fuerint æquales.

Sit *EG* linea horizonti perpendicularis, & *EF* linea

nea ad horizontem in angulo quocunque inclinata, & ſit *GA* ad *EF* perpendicularis; Dico quod corpus grave quodcunque eandem velocitatem acquiret per lineam inclinatam *EF* deſcendendo, quam caſu perpendiculari per lineam *EG* acquirere poſſet. Eſt enim ex prius demonſtratis vis gravitatis in plano obliquo *EF*, ad vim gravitatis in perpendiculari *EG*, ut *AB*, ad *AC*, ſive, ob ſimilia triangula *ACB EFG*, ut *EG* ad *EF*; ſive etiam ob ſimile hiſce triangu-

Coroll. 2. Met. Leg. 23.



lum *EGA*, ut *EA* ad *EG*. Unde ob vires diverſas erunt motus & velocitas corporis per *EA* in plano inclinato deſcendentis, ad motum & velocitatem corporis per *EG* deſcendentis, dato illo deſcenſus perpendicularis tempore, ut *EA* ad *EG*, ſive ut *EG* ad *EF*; & velocitas deſcendentis per *EA*, ad velocitatem deſcendentis per *EF*, in ſubduplicata ratione *EA* ad *EF*, hoc eſt, in ratione *EA* ad *EG*. Eſt ergo velocitas corporis in puncto *A* ad velocitatem in puncto *F*, & ad velocitatem deſcendentis perpendiculariter in puncto *G*, in eadem ratione, nempe lineæ *EA* ad lineam *EG*, vel

† VI. 8. Elem.

lineæ *EG* ad lineam *EF*: Unde æquantur illæ velocitates sibi invicem. *Q. E. D.*

Corollarium (1.) Dum corpus perpendiculariter cadens describit lineam *EG*, corpus oblique cadens describit lineam *EA*, per perpendicularem *GA* determinatam.

Corollarium (2.) Tempus casus perpendicularis, ad tempus descensus obliqui, est in subduplicata ratione lineæ *EA* ad lineam *EF*; sive ut linea *EA* ad lineam *EG*, hoc est, in ratione altitudinis perpendicularis *EG* ad lineam obliquam *EF*. Unde quanto minuitur velocitas, ob vim diminutam, tanto augetur, ob tempus auctum; ita ut in eadem altitudine perpendiculari eadem usque maneat velocitas, qualiscunque sit casus inclinati ad horizontem obliquitas.

Coroll. (3.) Tempora descensuum super planis diversimode ad horizontem inclinatis, sed quorum eadem est elevatio, sive altitudo perpendicularis, sunt inter se ut planorum longitudines. Est enim Tempus descensus per *EF* ad tempus descensus per *EG*, ex jam demonstratis, ut *EF* ad *EG*, & tempus descensus per *EG*, ad tempus descensus per *EH*, ut *EG* ad *EH*; unde ex æquo erit tempus descensus per *EF*, ad tempus descensus per *EH*, ut *EF* ad *EH*. *Q. E. D.*

Vid. Fig. p. 97.

Coroll. (4.) Si ex altitudine eadem perpendiculari descendat mobile continuato motu per quotlibet, & quælibet plana contigua, puta *EI IK KL* utcunque inclinata, semper eandem in fine velocitatem acquiret: quæ nimirum æqualis erit ei quam acquireret cadendo perpendiculariter ex pari altitudine. Nempe ex Hugenii mente eadem erit cadentis velocitas juxta jam demonstrata ad punctum *I*, sive per *EI*, sive per *MI*; unde eadem etiam velocitas erit quoque pergendo per *IK* eadem nimirum quæ per *NK*, unde quoque eadem velocitas erit ad punctum *K* sive per *EI* & *IK* sive per *MK*, vel etiam per *NK*; unde sequetur eadem veloci-

Vid. Fig. p. 97.

tas pergendo per *KL*, & ad punctum *L*, quæ esset si descensus esset per planum unicum *NL*, vel per duo *MK* & *KL*, vel etiam per tria *EI IK KL*; eadem nempe ex jam demonstratis quam mobile cadens perpendiculariter ad punctum *G* acquirere potuit. *Q. E. D.*

Coroll. (5.) Hinc liquet etiam, ex ejusdem Hugenii mente quod, per circuli circumferentiam, vel cycloidem, vel curvam quamlibet lineam descendente mobili, eadem semper acquiretur velocitas, si ab æquali altitudine descenderet: & quod ista velocitas tanta erit quantam corpus casu perpendiculari ex eadem altitudine acquirere debuit. Sunt enim curvæ lineæ quasi ex innumeris rectis compositæ; & cum vera sit propositio in perimetris rectilinealibus quotcunque, vera etiam erit ubi numera sunt infinitæ, hoc est, ubi in lineas curvas desinunt. *Q. E. D.*

Coroll. (6.) Hinc etiam liquet quod si grave à descensu sursum convertat motum suum, ascendet ad eandem unde venit altitudinem per quascunque planas superficies contiguas & quomodocunque inclinatas incesserit. Nempe ut * prius, eadem erit velocitas in puncto quovis *K* & *I*, sive grave descendat, sive ascendat; unde certe & idem erit velocitatis ascendentis vel descendentis Limes sive terminus ad punctum *E*. Unde etiam si infinita fuerit planorum multitudo, hoc est, si superficies sit curva, mobile per hanc curvam quoque ad eam ex qua venit altitudinem nec ultra, assurget.

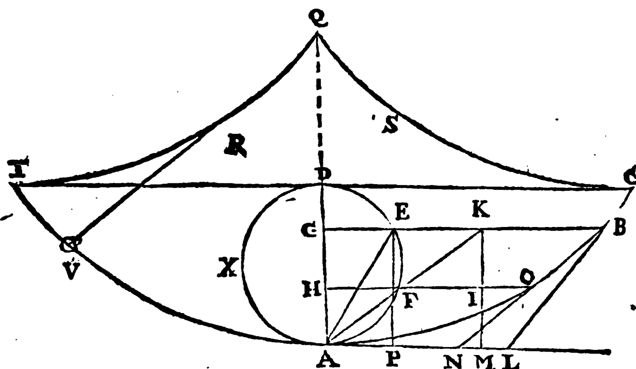
* *Prop.* 5. *Vid. Fig. p.* 97.

Coroll. (7.) Si mobile cadat perpendiculariter, vel per quamlibet superficiem descendat, ac rursus impetu ex descensu concepto per quamlibet aliam feratur sursum, habebit ascendendo ac descendendo in punctis æque altis eandem semper velocitatem: & si superficies ascensus sit superficei descensus similis & æqualis; æquali tempore ascendet quo prius descenderat. Hæc nempe adeo liquido ex jam demonstratis sequuntur, ut pluribus non sit opus.

Lemmata ad Propositionem septimam.

Lem. (1.) SI qua curva linea eo modo sit comparata, ut vim gravitatis pro longitudinis suæ ratione ubique sustineat; ita ut quo lineæ pars describenda sit major, eo & vires acceleratrices sint etiam in eadem omnino ratione majores; atque ut quo lineæ pars describenda sit minor, eo & vires acceleratrices sint in eadem pariter ratione minores, tempora descensus per istiusmodi curvam, sive arcus descripti sint majores sive minores, erunt sibi invicem semper æqualia. Velocitas enim dato tempore est ut vis motrix; si itaque linea describenda sit etiam ut eadem vis motrix, necesse est ut sit pariter ut velocitas; si autem motus velocitas sit ubique ut linea describenda, palam est lineam quamcunque sive parvam sive magnam eodem tempore describi debere. Quod autem Cyclois hujusmodi sit linea curva in sequentibus patebit. Esto itaque.

Lemma (2.) Sit *DAC* semicyclois, *DFA* semicir-



culus genitor, & à puncto quovis *B* in cycloide ducatur linea *BE* basi *DC* parallela, occurrens semicirculo genitori in *E*; ducatur chorda *AE*, & à puncto *B* in cycloide

cycloide linea *B L* chordæ *A E* parallela: Erit Linea *B L* cycloidis Tangens in puncto *B*.

Lemma (3.) Et *AB* arcus cycloidis erit æqualis duplæ chordæ *AE*. Hæc duo postrema Lemmata uti prius obſervatum ex Elementis Cycloidis conſtant: & à Cl. Wrennio noſtro aliiſque demonſtrata extant.

Vid. Wallis. Op. Vol. 1. *p.* 533. *&c.*

VII. In Cycloide, cujus axis ad perpendiculum erectus eſt, vertice deorſum ſpectante, tempora deſcenſus quibus mobile à quocunque in ea puncto dimiſſum ad punctum imum verticis pervenit ſunt inter ſe ſemper æqualia.

Sint arcus in Cycloide quicunque *B A* & *O A*, *B L* & *O N* tangentes in punctis *B* & *O*, iiſque, per Lemma Secundum, reſpective parallelæ ſemicirculi genitoris chordæ *E A* & *F A*; producatur *A F* ad punctum *K*: Sunt itaque, per Lemma Tertium, lineæ deſcribendæ à mobili nunc ad *B*, nunc ad *O* poſito, ut chorda *EA* ad chordam *FA*: Eſt vero in eadem ratione vis ſecundum tangentem *BL*, eive parallelam *EA*, ad vim ſecundum tangentem *O N*, eive parallelam *A F*. Nam * ut quadratum *E A*, ad quadratum *F A*, ita ſinus verſus *E P*, ad ſinum verſum *F P*; vel ita *K M* ad *F P*; vel ita *K A* ad *F A*. Eſt ergo Chorda *A E* inter Chordam *A F* & lineam *A K* media Geometrice proportionalis; atque adeo *A F A E A K* ÷÷. Sed ex prius demonſtratis eſt vis gravitatis in plano *A E*, ad vim gravitatis in plano *A F*, ut *A K* ad *A E*; hoc eſt, ut *A E*, chorda, ad *A F* chordam; atque ita ubique. Erat autem linea deſcribenda modo ut eadem *A E* ad candem *A F*; atque proinde vis acceleratrix eſt ubique in eadem ratione atque linea deſcribenda, & tempora deſcenſus ex conſequenti ſunt ubique æqualia. *Q. E. D.*

* *Prop.* 2. *ſupra.*

Coroll. 2. *Poſt Leg. Mot.* 23. *prius.*

Coroll. (1.) Si itaque integras alias ſemicycloides *QRT QSC*, prioribus *AT* & *AC* ſimiles & æqua-

les, quarum vertices basin alterius ad puncta T & C contingunt efformemus, & corpus grave V filo QRV ipsi QDA sive duplæ DA æquali à centro Q pendeat; & inter istas semicycloides QRT QSC agitetur, grave pendulum ex fili QRV evolutione cycloidem integram primariam describet, uti ex Cycloidis affectionibus constat; & cujuscunque amplitudinis oscillationes usque ad omnium maximam per arcum TAC iisdem ad amussim temporibus conficiet; atque ita ut appensi corporis centrum oscillationis in ipsa curva TAC semper versetur.

Coroll. (2.) Cum oscillationes quævis in cycloide sint semper isochronæ, & cum oscillationes minimæ in arcu minimo circuli, cujus radius est QA, & in arcu minimo Cycloidis TAC, ob arcus circuli & Cycloidis in puncto imo, hoc in casu plane coincidentes, sint eædem; liquet tempus oscillationis cujusque in Cycloide æquale esse tempori oscillationis minimæ in circulo, cujus radius est diametri circuli genitoris duplus.

Coroll. (3.) Ob eandem etiam in puncto imo arcuum minimorum circuli & Cycloidis coincidentiam, erunt & oscillationes in circulo eo magis isochronæ quo arcus descripti sunt minores; ita ut in arcubus perexiguis pro isochronis haud immerito haberi possint.

Coroll. (4.) In horologiis itaque oscillatoriis, quæ longioribus utuntur pendulorum corporum filis vel retinaculis quibuscunque, tempora oscillationum ob arcus minores descriptos magis ad æqualitatem vergunt quam in iis quæ brevioribus filis utuntur; atque adeo horologia priora posterioribus sunt longe anteferenda.

Coroll. (5.) Tempora oscillationum per diversas Cycloides sunt in ratione subduplicata Cycloidum vel radiorum QA: sive longitudines pendulorum sunt in ratione temporum duplicata: hoc ex prius demonstratis huic casui applicandis facile constare poterit. Sed notandum, idem etiam esse de temporibus oscillationum in circulis æque ac in Cycloidibus intelligendum: Sic sane

Prop. 4. prius.

quia

quia pendulum 39,25 digitorum oscillationes quasvis in Cycloide, & minimas etiam in circulo tempore minuti unius secundi conficit, pendulum 157 digitorum oscillationes consimiles tempore minutorum duorum secundorum, & pendulum 353,25 digitorum oscillationes consimiles tempore minutorum secundorum trium est confecturum.

Coroll. (6.) Cum tempora oscillationum quarumvis sint in sola Cycloide æqualia; & eo tantum nomine in arcubus minimis circularibus pro æqualibus habendæ quod circa punctum imum nec alibi arcus isti circulares cum Cycloidis arcubus fere coincidant, dum alias arcus circulares majores ab arcubus majoribus Cycloidis satis longe discrepent & discedant, manifestum est pendula in diversis circuli arcubus majoribus oscillantia oscillationes minime isochronas obtinere, & eo minus isochronas qua major est arcuum descriptorum differentia. Sic sane, ex Hugenii calculo, est tempus descensus per totum circuli quadrantem, ad tempus per arcum minimum, fere ut 34 ad 29, nimirum si oscillationes in vacuo peractas sine ulla aeris resistentia supponamus. Unde sane sequitur differentiam temporum in hoc casu ultra septimam temporis totius etiam majoris partem assurgere, & proinde esse experimentis quibusvis satis sensibilem; si nempe temporis spatium 10 & 20, pluriumve oscillationum maximarum cum totidem minimarum temporis spatio conferamus.

Horolog. Oscill. pag. 9.

Coroll. (7.) Quoniam constat per experimenta pendulorum & calculum inde initum quod oscillationes singulæ ex descensu & ascensu compositæ, ubi penduli longitudo est 96,85 digitorum, quælibet nempe in cycloide & minimæ in circulo; spatio minutorum tertiorum 94,25, sive secundi unius & tertiorum 34,25 peragantur; & quoniam ex Hugenii demonstratis Tempus hujusce oscillationis est ad tempus casus perpendicularis per diametrum circuli genitoris qua-

druplicatam, ſive per longitudinem penduli duplicatam digitorum 193⌊7, hoc eſt, pedum Anglicorum 16⌊1, eſt circuli circumferentia ad diametrum duplicatam, ſive ut 94⌊25 minuta tertia ad 60 ejuſdem generis minuta; ſive ad minutum ſecundum unicum. [Eſt eſt enim ut 355: ad 226 :: ita : 94″⌊25 : ad 60″ = 1′.] Inde ſequitur, quod unius ſecundi ſpatio corpus grave per 16⌊1 pedes Anglicos ſive 15$\frac{1}{12}$ Pariſienſes vi gravitatis ſuæ deſcendet. Quæ ſane deſcenſus velocitas, e pendulorum experimentis deducta, cum cadentium corporum experimentis à Cl. Hugenio captis apprime convenit; atque adeo pro velocitate deſcendentium corporum vera eſt indubie habenda.

Horolog. Oſcill. pag. 57, 58. *Et De vi Centrifuga Prop.* 12.

Horolog. Oſcill. p. 155, 156.

Coroll. (8.) Data ergo corporis cadentis ſpatio unius ſecundi linea perpendiculari, datur una & linea, ſeu perpendicularis ſeu obliqua temporis ſpatio quocunque ſive majori ſive minori ex eadem gravitatis vi deſcribenda: quippe quæ ſit ubique in ratione temporis duplicata. Sic in directe cadentibus, ut temporis cujuſvis, puta minutorum ſecundorum decem, quadratum = 100 ad unius minuti ſecundi quadratum = 1. Ita erunt 1610 pedes Anglici minutis illis decem deſcripti, ad 16⌊1 pedes Anglicos unico minuto, uti jam vidimus, deſcriptos, atque ita ubique. Neque multo aliter in obliquis res ſe habet. Lineæ enim deſcenſus in plano quolibet obliquo ſunt etiam pari ac priores jure inter ſe ut quadrata temporum: id tantum intereſt, quod vis gravitatis continuo agens minuenda eſt hoc in caſu in ratione lineæ perpendicularis ad obliquam; nempe *EG* ad *EF*, vel *EA* ad *EG*. Cum enim, uti antea oſtendimus, corpus grave obliquum per lineam *EA* eodem tempore deſcendit quo perpendicu-

Prop. 4. *prius.*

Vid. Fig. p. 97. *Coroll.*(1.) *Prop.* 6. *prius.*

lare

lare per lineam *EG*. Liquet vires motrices esse ubique in eadem ratione. Ponamus itaque corpus grave per planum adeo obliquum descendere, ut *EG* sit tertia tantum pars ipsius *EF*, vel, quod perinde est, ut *EA* sit tertia tantum pars ipsius *EG*; Oportebit tantum gravitatis vim in eadem ratione diminuere, ita ut spatio minuti unius secundi corpus per lineam solum pedum 5L37 descendere supponatur, & calculus ut prius in directe cadentibus administrabitur.

Novemb. 27. 1704.

XI.

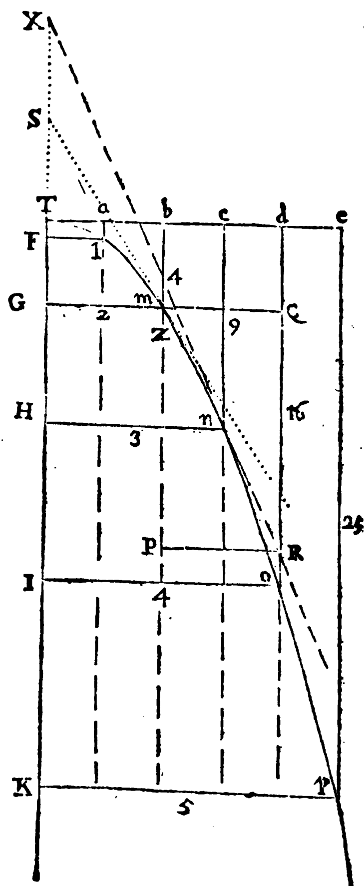
VIII. PROJECTILIA omnia quæ non sunt horizonti perpendicularia Parabolas describunt, nisi quatenus per aeris resistentiam aliquantulum retardantur.

Sit enim corpus quodvis ad *T* positum, & tempore quovis dato vi projectionis horizontalis secundum tangentem *Te* tendat; ea nempe velocitate qua lineam horizontalem *Ta* dato illo tempore describeret, si modo nulla alia vi impelleretur: Accedat jam vis gravitatis & agat secundum lineam *TK* horizonti perpendicularem, aut secundum *al bm cn do ep* ipsi *TK* parallelas; (Ob ingentem enim centri telluris, quo tendit vis gravitatis, distantiam, lineæ ad illud ductæ pro parallelis haberi debent) cum itaque vis projectionis motum secundum directionem suam *Te* vel secundum *FI Gm Hn Io Kp* ipsi *Te* parallelas motum æquabilem & uniformem pariat; neque velocitas hujus motus secundum directionem primariam quicquam patitur ex vi gravitatis accessoria, uti olim ostendimus, Corpus in fine primi temporis reperietur alicubi in linea *al*, in fine secundi temporis alicubi in linea *bm*, in fine tertii in *cn*, quarti in

Coroll. 1. *Post Leg. Mot.* 22.

de, quinti in *ep* lineis nempe iſtis æquali ubique intervallo inter ſe diſtantibus. Accedat jam vis gravitatis, & dum corpus vi ſola projectili lineam *Ta* deſcriberet, vi ſola gravitatis per lineolam quamvis *TF* vel *al* acceleretur, quoniam itaque ex hac vi gravitatis, ſi ea ſola agitaretur, corpus in fine primi temporis ad lineam *Fl*, accederet; & cum velocitas hujus motus deorſum pari ac prioris ratione nihil patiatur ex vi projectionis acceſſoria, repetietur etiamnum alicubi in linea *Fl*: Sit itaque *al* partis unius, *bm* partium 4, *cn* partium 9, *do* partium 16, *ep* partium 25, & ita porro in infinitum; nempe ut temporum ſive diſtantiarum *Ta Tb Tc Td Te* quadrata: Liquet igitur ex prius demonſtratis corpus in fine temporis ſecundi repertum iri alicubi in linea *Gm*, in fine tertii temporis in linea *Hn*, quarti in *Fo*, quinti in *Kp*, & ita porro in infinitum.

Prop. 4. prius.



Neceſſe

Necesse est ergo ut projectile quovis tempore exeunte ex conjunctis viribus in linearum istarum intersectionibus reperiatur, nempe in fine primi temporis corpus in puncto *l* reperietur, in fine secundi in puncto *m*, in fine tertii in *n*, quarti in *o*, quinti in *p*, & ita ubique. Quare cum ex natura hujusmodi motus compositi *TF*, sit ad *TG*, ut *Fl* quadratum, ad *Gm* quadratum, & ita in reliquis; & cum ex primaria Parabolæ proprietate abscissæ cujusvis diametri *TF* & *TG* sint etiam inter se ut quadrata semiordinatarum *Fl* & *Gm*, liquet puncta quævis *l m n o p* esse ad parabolam, cujus *TK* est Diameter principalis, & *TF TG TH TI TK* sunt abscissæ, & *Fl Gm Hn Io Kp* sunt semiordinatæ. Cum autem omnia hic demonstrata ad quamvis diametrum, ubi tangens est ad eandem utcunque obliqua, æque pertineat ac ad ipsum axem, ubi est ad eundem perpendicularis, liquet universaliter omnes omnium projectilium trajectorias esse vere Parabolicas; nisi quatenus per aeris resistentiam aliquantulum retardantur. *Q.E.D.*

Coroll. (1.) Hinc artis Balisticæ fundamenta discere licebit: cum enim omnia projectilia secundum inclinationem qualemcunque emissa Parabolas aut majores, aut minores, aut saltem ejusdem parabolæ partem majorem aut minorem sint descriptura, nisi quatenus ab aeris resistentia retardentur; & cum aeris retardatio in arte balistica ob motus velocitatem & projectorum soliditatem sit nullius pene momenti; Palam est ex natura & proprietatibus Parabolarum artis hujus principia esse petenda. Usus hujus Corollarii latissime patet, & pluribus exemplis ex arte balistica desumptis in sequentibus illustrabitur. Esto itaque

Coroll. (2.) Data projectionis velocitate, quicunque sit elevationis angulus, dabitur una Distantia foci Parabolæ quam projectile describit à projectionis incipientis puncto. Sit *s* punctum projectionis, ubi projectile per tangentem *sv* vibratum in curva parabolica incipit incedere, & sit *su* linea quovis dato tempore à vi pro-

ejectili

jectili sola describenda; sit etiam *v c* vel *s r* lineola eodem dato tempore, vi gravitatis sola, describenda: In fine itaque istius temporis projectile reperietur in Parabolæ puncto *c*, & ob datam gravitatis, æque ac projectionis vim, dabuntur etiam, qualiscunque sit tangentis ad horizontem inclinatio, lineæ *v c* sive *s r* &

sv sive *cr*, hoc est, diametri *so* abscissa & ejusdem semiordinata; quarum duarum tertia proportionalis est Latus rectum ad verticem *s* pertinens; quod itaque ex datis prioribus necessario dabitur. Unde & istius lateris recti pars quarta, quæ ipsa est verticis *s* à parabolæ foco distantia una dabitur. Qamquam itaque ex eadem pro-

projectionis velocitate diversæ Parabolæ, in diversis elevationibus describantur, erunt tamen earum omnium foci à vertice sive puncto motus incipientis æqualibus intervallis distantes, & proinde in circuli cujus centrum est in isto puncto, circumferentia positi. Q, E. D.

Coroll. (3.) Jactus itaque horizontalis longissimus is est qui secundum lineam inter horizontalem & perpendicularem mediam, sive in angulo 45 graduum supra horizontem dirigitur. Nempe cum vertex principalis Parabolæ cujusvis à projectilibus descriptæ sit in summa projectilis altitudine, sub quo in ipso axe, focus figuræ *F* collocatur; cum ejusdem foci à vertice *s* distantia ex corollario postremo detur; cum etiam jactus horizontalis longissimus per ordinatam ad axem per verticem *s* transeuntem *eg* omnino mensuretur; tum certe jactus horizontalis erit longissimus ubi verticis *s* à foco distantia *sF* cum ordinata ad axem *sg* coincidit: Alias enim ob datam foci distantiam *sF sg* erit minor quam *sF* duplicata: Sed ubi coincidit *sF* cum *sg* erit *sg* ipsius *sF* dupla, atque adeo jactus horizontalis *sg* erit eo loci omnium longissimus, ubi *sF* distantia foci à vertice *s* cum *sg* coincidit; hoc est, ubi angulus *vsh* est semirectus: Angulus enim *vsF* à tangente *vs* & verticis *s* à foco distantia *sF* comprehensus æqualis semper est angulo *bso*, ab eadem tangente *bs*, & Parabolæ diametro *so* comprehensus. Si itaque angulus *bso* sit semirectus, erit etiam & *vsF* semirectus, atque proinde angulus *osF* erit rectus, & linea *sF* evadet *sh*, & cum ordinata *sg* coincidet, fietque ordinata *sg* jactus omnium longissimus.

Coroll. (4.) Cum itaque Parabolæ tangens eo solo in casu cum diametro angulum semirectum comprehendat, ubi eandem ad lateris recti principalis per focum transeuntis terminum contingit, patet jactum horizontalem longissimum quemvis intra curvæ parabolicæ partem supra latus rectum positam, existente foco in ipsa linea horizontali, esse comprehensum; & altitudinem sum-

mam

mam in hoc casu ab horizonte esse TP lateris recti principalis quadrantem.

Coroll. (5.) Si angulus elevationis à semirecto æqualiter deficiat, sive elevatio sit major sive minor, jactus longissimus horizontalis æqualiter minuetur. Nimirum ob angulum rectum hso, & angulos vsF osb semper sibi invicem æquales, eorum sive excessus supra rectum, sive defectus, à recto æquales æquabuntur angulo Fsh, sive focus F sit supra lineam horizontalem sg, ut in elevatione majore, sive sit infra eandem, ut in minore. Datis autem angulo Fsh acuto, & recto Fhs, & latere Fs, datur unà latus sh axis semiordinata, & sg ordinata jactum horizontalem determinans. Sic sane in projectionibus æque velocibus ubi anguli elevationis sunt graduum 40 & graduum 50 jactus horizontalis erit utrinque æqualis; & perinde in gradibus 30 & 60, in gradibus 20 & 70, & ita ubique, uti in arte balistica est notissimum.

Coroll. (6.) Distantiæ horizontales ex data velocitate genitæ in diversis elevationis angulis sunt ut angulorum tangentis & perpendicularis duplicatorum sinus recti. Nempe ut gs ubique ita est ejusdem dimidium hs: In triangulo autem rectangulo Fhs ob datum radium Fs, & angulum hFs, anguli tangentis & perpendicularis bso duplum, erit sh ubique istius anguli sinus rectus, adeoque erunt semper distantiæ horizontales inter se ut sinus isti.

Coroll. (7.) Tempora jactus cujusque horizontalis ex data velocitate in diversis elevationis angulis sunt inter se ut angulorum elevationis sinus recti. Projiciatur corpus unum secundum angulum elevationis lcd, & alterum secundum angulum LAD; dico quod tempus quo corpus prius per arcum parabolicum cTl pertingit ad punctum l, in eodem cum puncto à plano horizontali situm, erit ad tempus quo corpus posterius per arcum AtL pertingit ad punctum L in eodem cum

Vid. Fig. p. 108, & 111.

puncto

puncto *A* plano horizontali situm, ut sinus anguli *dcl* ad sinum anguli *DAL*. Sit apud figuras hasce Δ*A* æqualis ipsi *dc*: Erit etiam Δ*e* (ob temporis æqualitatem, quo corpora simul lineas æquales *dc* & Δ*A* vi sola projectili describerent) ipsi *dl* æqualis. Est autem ex natura Parabolæ prius exposita, *DL* ad Δ*e* ut *DA* quadratum, ad Δ*A* quadratum; sive ut *DL* quadratum, ad *Di* quadratum. Ergo *DL* Δ*i* Δ*e* sunt tres lineæ continue proportionales: Et cum lineæ *DL* Δ*e* sint in duplicata ratione temporum, erunt Δ*i* & Δ*e* in ipsa ratione temporum: Est ergo Tempus prius, ad tempus posterius ut Δ*e* sive *dl*, ad Δ*i*; hoc est, ut sinus angulorum elevationis *dcl* & *DAL*. *Q.E.D.*

Prop. 4. primi.

Coroll.

Coroll. (8.) Altitudines maximæ corporum data velocitate projectorum in diversis elevationis angulis sunt inter se ut quadrata sinuum rectorum angulorum elevationis. Nempe ut dl vel Δe quadratum ad Δi quadratum, ita altitudines maximæ dl vel Δe, ad DL. *Q. E. D.*

Coroll. (9.) Altitudo omnium maxima corporum velocitate data projectorum, ubi nempe projectio est horizonti perpendicularis, est lateris recti in data velocitate semper dati pars quarta; nempe in hoc casu, parabola in rectam desinente, Vertex Parabolæ T cum foco F coincidit, & altitudo summa fit ipsi Fs lateris recti dati quadranti æqualis: atque adeo, quod obiter est notandum, longissimi jactus horizontalis semissis: uti statim demonstrabitur.

Coroll. (10.) Dato projectionis angulo, sed mutata projectilis velocitate; & altitudo summa, hoc est, Parabolæ vertex principalis, & jactus longissimus horizontalis, sive ordinata sg, mutabuntur in duplicata velocitatis ratione. Pars prior ex prius demonstratis patet; cum altitudines linearum sive ascensus sive descensus, sint semper in duplicata ratione velocitatum. Et ex hac parte propositionis sequitur etiam & altera; ob similitudinem enim omnium parabolarum, si altitudo Th mutetur in ratione velocitatis duplicata, etiam ob similes similium Figurarum partes utrobique descriptas, & reliquæ lineæ ut sh vel sg etiam in eadem ratione duplicata mutabuntur. Verum & Posterior corollarii pars ex natura Parabolæ etiam aliter facile deduci potest. Ponamus enim velocitatem esse duplo quam prius majorem, ergo quo tempore projectile prius lineam sv describeret, posterius lineam ipsius sv duplam describet; sed ob uniformitatem vis gravitatis linea vc sive sr non mutabitur: Est ergo ut vc sive sv data, ad lineam ipsius sv duplam, ita ista linea dupla ad lineam alteram, verticis s latus

Vid. Fig. p. 108.

Prop. 4. prius.

latus rectum; nempe lateris recti ad verticem istum prius pertinentis quadruplum: Unde quarta hujus lateris recti pars, sive sF erit quartæ prioris lateris recti partis sF etiam quadrupla; & ob triangula in utroque casu similia sFh sFh lineæ sh & sg ipsarum sh & sg erunt etiam quadruplæ; & ita in reliquis. Est ergo in velocitate duplo majore jactus horizontalis longissimus quadruplo major, in tripla velocitate noncuplus, & ita porro in infinitum. Imo vero generaliter est affirmandum, omnes Parabolæ lineas similes similiterque positas augeri semper & minui in duplicata velocitatis auctæ vel diminutæ ratione; ut ex hactenus dictis satis constare potest.

Coroll. (11.) Longissimus jactus horizontalis cujusque Parabolæ est æqualis dimidio lateri recto ad verticem, latus rectum principale terminantem, pertinenti. Est enim in eo casu Fs æqualis sh; sed Fs est lateris recti ad verticem dictum pertinentis pars quarta; & sg ipsius sh dupla, unde sg horizontalis jactus longissimus erit lateris istius recti dimidium.

Coroll. (12.) Hinc determinare licet jactum horizontalem longissimum cuicunque velocitatis gradui congruentem. Fiat nempe ut linea sr unico minuto secundo vi gravitatis descripta 16⌊1 pedum Anglicorum, ad velocitatem projectilis sv vel rc pari tempore computandam, ita ista velocitas, ad numerum quartum, latus rectum verticis s in iisdem pedibus exhibiturum: Hujus numeri semissis longissimum jactum horizontalem dabit, uti ex superioribus est abunde manifestum. Sic si projectilis velocitas tanta sit ut minuto unico secundo pedes Anglicos mille peragrare possit, fiat ut 16⌊1: ad 1000 :: ita 1000 ad numerum quartum = 62.112, latus rectum verticis s in pedibus Anglicis designantem. Est itaque longissimus jactus horizontalis pedum Anglicorum 31.056; ultra quem terminum nihil attingi potest, sed intra quem locum quemvis assignatum attingere sequenti corollario docebimus.

I Coroll.

Coroll. (13.) Problema (1.) Locum quemvis in plano horizontali assignatum, ultra dimidium lateris recti verticis *s* non distantem, ex data velocitate motu projectili attingere. Sit locus ille ad pedum Anglicorum 20,000 distantiam, & sit corporis projecti velocitas ea quam in postremo corollario posuimus: Ob datam itaque velocitatem, datur latus rectum verticis ubi projectile motum suum per curvam incipiet, ejusque proinde pars quarta, sive linea *sF*, pedum nempe 15.528: Est autem ex prius dictis *sh* pedum 10.000; ex hisce inveniatur angulus *hsF* per hanc analogiam ut *sh*, ad *sF*, sive ut 10.000 ad 15.528, ita erit radius ad secantem anguli *Fsh*, per secantium tabulam inveniendi, graduum nempe 49°. 47′; quo angulo ex recto ablato, aut ad rectum superaddito, dabitur angulorum æqualium *vsF* & *osh* summa; cujus dimidium *Fsv* vel *osb* angulum quem tangens *vb* cum perpendiculari *so* comprehendere debet determinabit; nempe 90° — 49°. 47′ = 40°. 13′ vel 90° + 49°. 47′ = 139° 47′; cujus angulus dimidius est vel 20° 6′ 30″ vel 69°. 53′. 30″; Prout nempe elevationem mediocri aut majorem aut minorem adhibendam volumus; si itaque globulus plumbeus velocitate assignata in angulis assignatis projiciatur, parabolam requisitam est descripturus, & proindè locum assignatum petiturus, sine ulla alia à scopo aberratione, quam quæ ab aeris resistentia perexigua sit oritura; quæque ob parvitatem fere contemni potest. Problema ergo solutum dedimus, & data velocitate scopum quemvis in plano horizontali non nimium distantem attingere docuimus.

Coroll. (14.) Problema (2.) Locum quemvis in plano horizontali assignatum ex data elevatione motu projectili attingere; scilicet ex data loci distantia *sg* & dato angulo *hsv* velocitatem *sv* determinare. Nempe *sF* quadruplicata dabit latus rectum ad verticem *s* pertinens: Ut ergo inveniatur *sv* ducenda est *vc* vel *sr* in *sf* quadruplicatam, & inde orietur rectangulum quadrato

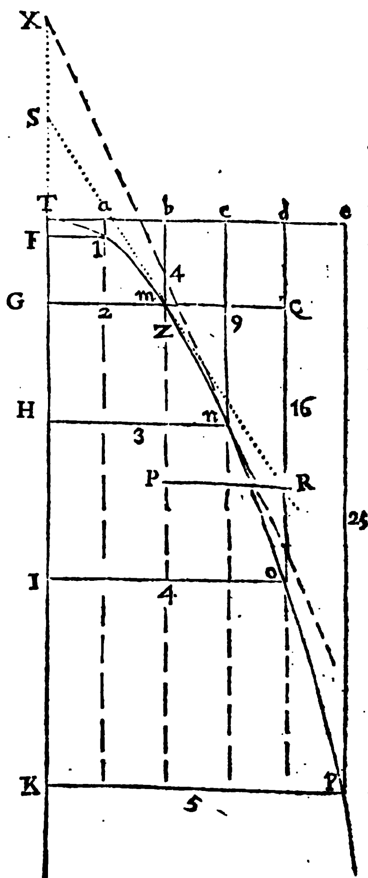
drato vs vel cr æquale; extracta itaque ex illo rectangulo radice quadratica, invenietur vs vel cr, semiordinata illa quam projectile minuto unico secundo est descripturum. Exempli gratia: Esto objecti distantia sg pedum Anglicorum, ut prius, 20,000; & angulus datus hsv 69°. 53'. 30''. Erit angulus Fsv vel osb graduum 20°. 6'. 30''. & angulus Fsh graduum 49°. 47'. Unde è tabulis sinuum ratio lineæ sh ad Fs habebitur 10.000 ad 15.528: Unde dabitur Fs, & latus rectum verticis s pedum 62.112; quo numero in vt vel sr pedum 161 1 ducto, orietur numerus rectangulus 1,000,000, cujus radix quadratica est 1000, numerum pedum lineæ sv exhibitura. Si itaque in angulo dato ea sit primaria projectilis velocitas, ut pedes mille spatio unius minuti secundi conficere possit, scopum g in curva parabolica sTg positum attinget, nisi quatenus aeris resistentia perexigua motum projectilis aliquantulum retardare potuerit. Et eadem omnino esset computatio, si angulus Fsv vel osb graduum 69°. 53'. 30''. positus esset, uti ex ante dictis in corollario postremo facile constare potest.

Coroll. (15.) Hinc etiam ex data elevatione, aut ex data velocitate etiam locum quemvis ut l extra planum horizontale positum projectili attingere possumus: Si nimirum in eadem Parabola, si opus est, producta, aliud punctum ut g in plano horizontali positum notemus; idem enim jactus qui ad locum g, etiam & ad locum quemvis alium in eadem Parabola situm ut l omnino pertinget.

Coroll. (16.) Velocitas corporis Parabolam describentis est ubique ut recta linea à Parabolæ vertice T ad semiordinatæ medium ducta, sive ut Tangentis pars inter punctum contactus m & axem ducta, hoc est, ut secans anguli elevationis supra horizontem. Linea enim dato tempore describenda, est ut diagonalis parallelogrammi $mQRP$; cujus latus mQ semper datur, &

Vid. Fig. pag. prox.

mP est ipsi *bm* duplicatæ, sive ipsi *SG* æqualis: Est igitur velocitas in puncto *m*, ad velocitatem projectilem originariam in puncto *T*, ut *mR* ad *PR*, sive ut *Sm* ad *Gm*: Et ita ubique. Est itaque velocitas in puncto quovis Parabolæ *m*, ad velocitatem in puncto quovis alio *n*, ut Tangentis pars *Sm*, ad Tangentis partē *X*4; utraque nempe inter æquidistantes diametros *bm* & *TG* sumpta; hoc est, ut angulorum elevationis secantes. *Q.E.D.*



Coroll. (17.) Est itaque minima omnium velocitas in Parabolæ vertice *T*; & eo semper major velocitas quo distantia est ab eodem vertice major.

Coroll. (18.) Si itaque velocitates corporum in diversis angulis projectorum sint in ratione secantium angulorum elevationis supra horizontem, eandem, sive æqualem omnia Parabolam, hoc est, ejusdem vel æqualis Parabolæ partes describent; majores nempe ubi angulus elevationis est major, & minores ubi iste angulus est minor. Sin velocitates sint in alia ratione, diversas Parabolas, sive diversarum partes, ut describant, est necesse.

Decemb. 4. 1704. XII.

XII.

Lemma ad Propositionem (9^m) *& sequentes.*

CORPORUM in circulis gyrantium vires centripetæ causæ duplici sunt acceptæ referendæ, nimirum arcuum simul descriptorum curvaturæ, & motuum per eandem curvaturam velocitati. Nimirum cum omnis motus sit per se rectilinearis, & corpora per solam vim extraneam centripetam secundum arcus curvos circulares cieri possint, æquum est ut data velocitate curvaturam à vi sola centripeta genitam eidem vi centripetæ proportionalem statuamus. Proinde cum eo majores vires centripetæ ad eandem curvaturam generandam requirantur, quo velocitas projectionis sive motus æquabilis originarii est major, eo minores quo minor, æquum est etiam ut data curvatura vim centripetam, eidem velocitati proportionalem statuamus. Prout itaque fit in rectangulorum comparatione ut nimirum ex longitudinum & latitudinum rationibus conjunctis eorundem rationes veras determinemus, ita & in virium Centripetarum comparatione erit omnino faciendum, ut nempe ex curvaturarum & velocitatum rationibus inter se conjunctis earundem veras rationes dato quovis tempore definiamus. Esto itaque ratum, Quod virium centripetarum rationes ex curvaturarum & velocitatum rationibus conjunctis sunt ubique æstimandæ.

Scholium. Ut curvaturæ & velocitatis veras rationes recte intelligamus, Observandum est in angulis æqualibus minimis curvaturam esse ubique æqualem, si angulorum contactus subtensæ sint inter se ut radii vel distantiæ à centro; prout figurarum similium ratio omnino postulat: & si curvatura ab ea distantiarum ratione recedat, excessus aut defectus rationes pro veris curvaturæ excedentis vel deficientis rationibus in posterum computandis sunt habendæ. Velocitas autem ubique spectanda est quantum ad verum motum angularem

promovendum confert, atque adeo in linea radio ubique perpendiculari; sive, quod eodem recidit, in arcu circulari minimo est æstimanda. Ubicunque enim directio motus est aut sursum aut deorsum, quanto velocitas augetur, tanto semper curvatura minuitur, & è contra: quantitate quæ ex earundem conjunctis viribus oritur etiamnum minime mutata: quod probe est ubique observandum.

IX. Si mobilia duo æqualibus temporibus circumferentias integras inæquales *bdge BDGE* motu æquabili percurrant, erit vis centripeta in majori circumferentia ad eam quæ in minori, sicut ipsæ inter se circumferentiæ, vel earum diametri, vel etiam radii directe. *Vid. Fig. p. 87.*

Ob datam enim utrinque curvaturam, integri nimirum circuli, erit vis centripeta in majori circumferentia ad eam quæ in minori ut mobilium velocitates, hoc est, ut Circulorum circumferentiæ, vel, quod eodem redit, ut eorundem diametri vel radii directe. *Q. E. D.*

Corollarium. Si tempora periodica Corporum in circulis gyrantium æquentur, erunt tum velocitates, tum iisdem proportionales vires centripetæ inter se ut circulorum circumferentiæ, diametri, vel radii directe, & vice versa, si vires centripetæ corporum in circulis gyrantium sint inter se ut circumferentiæ, diametri, vel radii directe, erunt velocitates etiam in eadem ratione, & tempora periodica erunt ubique æqualia.

Coroll. (2.) Si corporis cujusvis centralis attractivi vires sint directe ut distantiæ ab eodem centro; corporum omnium circa illud corpus centrale in circulis gyrantium, tempora periodica erunt æqualia. Et pariter de Ellipsibus erit sentiendum, cum earum curvaturæ integræ sint circuli cujusvis curvaturæ integræ æqualis, & circumferentia inter circulorum hinc inde assumptorum circumferentias quasi intermedia. Unde ex æqualitate temporum periodicorum in circulis Ellipsibus sive majoribus sive minoribus, haud difficile erit eandem temporum periodicorum æqualitatem etiam & ellipsibus in-

intermediis circa earum centra aſcribendam intelligere.

X. Si mobilia duo in iiſdem ſive æqualibus circulis gyrentur celeritatibus inæqualibus, verum utraque motu æquabili, erit vis centripeta celerioris ad vim centripetam, tardioris in duplicata ratione celeritatum, ſive ut arcuum ſimul deſcriptorum quadrata. Ob datam enim circulorum æqualium in arcubus æqualibus curvaturam, ſimul cum velocitate creſcente creſcet etiam & curvatura in eadem ratione, & ſimul cum velocitate decreſcente decreſcet etiam & curvatura in eadem ratione: ergo vis centripeta ex curvatura & velocitate conjunctis æſtimanda erit dato tempore in ratione arcus ad arcum ſimul deſcriptum, propter velocitatis rationem, & in eadem ratione ejuſdem arcus ad eundem arcum ſimul deſcriptum, propter curvaturæ rationem: unde ex utriſque rationibus conjunctis erit, rectangulo ad quadratũ reducto, vis centripeta in duplicata arcuum ſimul deſcriptorum ratione, ſive ut arcuum ſimul deſcriptorum quadrata. *Q.E.D.*

Corollarium. Cum tempora Periodica in æqualibus circulis ſint velocitatibus reciproce proportionalia, erunt vires centripetæ in duplicata temporum periodicorum ratione reciproce, ſive ut temporum periodicorum quadrata reciproce, ita ut quo majus ſit temporis periodici quadratum, eo minor ſit vis centripeta; quo minus ſit quadratum illud, eo major ſit vis centripeta, atque ea in eadem ratione.

Coroll. (2.) Si mobilia plura circa plura corpora centralia attractiva ad eaſdem omnia diſtantias in circulis gyrentur, vires corporum centralium facile innoteſcent, cum ſint inter ſe ut temporum periodicorum quadrata reciproce: & velocitates etiam facile innoteſcent, cum ſint in ipſa temporum periodicorum ratione reciproca.

XI. Si mobilia duo in circulis inæqualibus æquali velocitate ferantur, erunt eorum vires centripetæ in ratione contraria circumferentiarum, diametrorum, vel radiorum, ita ut in minori circumferentia vis centripeta major exiſtat, & in majore minor.

Ob datam enim velocitatem vires centripetæ dato tempore erunt ut curvatura arcuum æqualium, hoc est, ut circumferentiæ, diametri, vel radii circulorum reciproce. *Q. E. D.*

Coroll. (1.) Cum tempora Periodica in æquivelocibus sint inter se in eadem ratione ac sunt circumferentiæ describendæ, si tempora Periodica mobilium diversos circulos percurrentium sint directe ut circulorum circumferentiæ, diametri, vel radii, vires centripetæ erunt ut istæ circulorum circumferentiæ, diametri, vel radii reciproce: & vice versa, si vires centripetæ sint ut radii vel distantiæ reciproce, erunt Tempora periodica ut radii directe.

Coroll. (2.) Si corporis cujusvis centralis attractivi vires sint reciproce ut corporum distantiæ à centro suo, ita ut quo magis appropinquant corpora, eo vis centripeta sit major, & quo magis elongantur, vis illa sit minor, idque in eadem ubique ratione, erunt tempora periodica corporum ad diversas distantias positorum ut distantiæ illæ directe, & eorundem velocitates æquales.

XII. Si duo mobilia in circulis inæqualibus velocitate inæquali quæ sit in subduplicata ratione circumferentiarum, diametrorum, vel radiorum ferantur, erunt vires centripetæ ubique æquales, nec in accessu vel recessu ullatenus aut auctæ aut diminutæ.

Ob majorem enim velocitatem in majori circulo eamque in subduplicata ratione circumferentiarum augendæ sunt in majori circulo vires centripetæ in eadem ratione. Et ob majorem curvaturam in minori circulo eamque etiam in subduplicata ratione circumferentiarum reciproce augendæ sunt in minori circulo vires centripetæ in eadem ratione. Liquet igitur vires centripetas æquali ratione utrinque esse augendas atque adeo esse etiamnum utrinque æquales. *Q. E. D.*

Sit enim exempli gratia radius circuli majoris radii circuli minoris quadruplus, sive ut 4 ad 1, & sit velocitas in majore ad velocitatem in minore in subduplicata

ra-

radiorum ratione, sive ut 2 ad 1. Cum curvatura majoris sit ad curvaturam minoris in arcubus similibus æqualis, & in æqualibus reciproce ut radii, necesse est ut in arcu duplo, quem dato tempore velocitas dupla in majore describet, curvatura sit alterius dimidia: est ergo velocitas prioris mobilis ad velocitatem posterioris ut 2 ad 1, & curvatura posterioris ad curvaturam prioris ut 2 ad 1. Unde vis centripetæ quantitas in priore erit ad vis centripetæ quantitatem in posteriore ut rectangulum ex velocitate prioris & prioris curvatura conjunctim, sive 2 × 1. ad rectangulum ex velocitate posterioris, & posterioris curvatura conjunctim, sive 1 × 2. hoc est in ratione æqualitatis; & sic ubique.

Coroll. (1.) Cum tempora Periodica in hoc casu sint inter se in subduplicata ratione circumferentiarum, diametrorum, vel radiorum, erunt temporum Periodicorum quadrata inter se ut circumferentiæ, diametri, vel radii. Si itaque temporum periodicorum quadrata sint inter se ut circumferentiæ, diametri, vel radii circulorum, erunt vires centripetæ in distantiis omnibus æquales, & celeritates in ratione earundem circumferentiarum, diametrorum, vel radiorum subduplicata. Et vice versa, si vires centripetæ sint in distantiis omnibus æquales, erunt temporum periodicorum quadrata ut distantiæ vel radii; & velocitates etiamnum in earundem ratione subduplicata.

Coroll. (2.) Si Corporis cujusvis centralis attractivi vires centripetæ sint in omnibus distantiis plane eædem, erunt velocitates in subduplicata ratione distantiarum; & temporum periodicorum quadrata inter se ut distantiæ illæ, vel diametri, vel circumferentiæ.

XIII. Si duo mobilia in circulis inæqualibus velocitate inæquali quæ sit in subduplicata circumferentiarum, diametrorum, vel radiorum ratione reciproce, ita ut in majori circulo velocitas sit minor, & in minori sit major, idque in subduplicata eorundem radiorum ratione reciproce, erunt vires centripetæ reciproce ut radiorum, vel distantiarum quadrata.

Ob

Ob minorem enim in majori circulo curvaturam eamque in sesquiplicata ratione radiorum reciproca; & ob minorem etiam celeritatem in majori circulo, eamque in subduplicata ratione radiorum etiam reciproca, erunt vires centripetæ ex rationibus hisce conjunctis derivandæ in ratione radiorum reciproca duplicata, sive reciproce, ut quadrata radiorum. *Q.E.D.*

Sit enim exempli gratia radius circuli majoris radii circuli minoris noncuplus, sive ut 9 ad 1. & sit velocitas in majore ad velocitatem in minore in subduplicata ratione radiorum reciproce, sive ut 1 ad 3. Cum curvatura majoris sit ad curvaturam minoris, ut prius, in arcubus similibus æqualis, & in æqualibus reciproce ut radii, necesse est ut in arcu alterius partem solum tertiam adæquante, quem dato tempore velocitatis alterius triens solum describet, in majore sit alterius pars tantum vigesima septima sive ut 1 ad 27. Est ergo velocitas in circulo majore ad velocitatem in minore ut 1 ad 3, & curvatura in majore ad curvaturam in minore ut 1 ad 27. Unde vis centripetæ quantitas in majore erit ad ejusdem quantitatem in minore ut rectangulum ex velocitate & curvatura in majore conjunctim, sive $1 \times 1 = 1$, ad rectangulum ex velocitate & curvatura in minore conjunctim, sive $3 \times 27. = 81$. hoc est, ut radii minoris quadratum $= 1$. ad majoris quadratum $= 81$. Et sic ubique. Erunt etiam tempora periodica inter se ut 27, ad 1, hoc est, in radiorum 9 ad 1 ratione sesquialtera; est enim 27, inter 9 & 81, media geometrice proportionalis; atque adeo ratio 27 ad 1 continet rationem 9 ad 1 & ejusdem 81 ad 9 rationem dimidiatam, sive subduplicatam 81 ad 27. [1 : 3 : 9 : 27 : 81 : ÷] & sic etiam ubique.

Coroll. (1.) Cum tempora periodica in hoc casu sint inter se in sesquiplicata ratione radiorum, erunt temporum periodicorum quadrata inter se ut cubi radiorum. Si itaque temporum periodicorum quadrata sint inter se ut cubi radiorum, erunt vires centripetæ inter se

ut

ut radiorum quadrata reciproce, & velocitates in subduplicata ratione radiorum reciproca. Et vice versa, si vires centripetæ sint inverse ut radiorum vel distantiarum quadrata, erunt temporum periodicorum quadrata inter se ut sunt cubi radiorum; & velocitates etiamnum in radiorum ratione subduplicata reciproce.

Coroll. (2.) Si corporis cujusvis centralis attractivi vires centripetæ sint in diversis distantiis à centro suo ut distantiarum istarum quadrata reciproce, erunt corporum in diversis distantiis gyrantium velocitates in subduplicata distantiarum ratione reciproce; & temporum periodicorum ratio duplicata erit rationi distantiarum triplicatæ æqualis, sive erunt temporum periodicorum quadrata inter se ut sunt cubi radiorum.

Coroll. (3.) Si motus sit in Ellipsi distantia inter maximam & minimam intermedia sumatur; & tum etiam in Ellipsibus erunt temporum periodicorum quadrata ut radiorum Cubi inter se æque ac in Circulis.

XIV. Si duo mobilia in circulis inæqualibus inæquali celeritate, eaque in radiorum ratione reciproca ferantur, ita ut quo major est radius, diameter, aut circumferentia, eo minor sit velocitas; & quo minor, eo major sit velocitas, eaque in reciproca radiorum ratione, erunt vires centripetæ ut cubi radiorum reciproce.

Ob minorem enim in circulo majori celeritatem, eamque in ipsa ratione radiorum reciproca; & ob minorem etiam in circulo curvaturam, eamque in duplicata ratione radiorum reciproca, erunt vires centripetæ ex conjunctis istis rationibus derivandæ in ratione Radiorum reciproca triplicata, sive ut cubi radiorum.

Sit enim exempli gratia radius circuli majoris radii circuli minoris duplus, sive ut 2 ad 1. Et sit velocitas in majore ad velocitatem in minore reciproce ut radii, sive ut 1 ad 2. Erit dato tempore curvatura majoris ad curvaturam minoris ut 1 ad 4. Est ergo velocitas in minore circulo ad velocitatem in majore ut 2 ad 1, & curvatura in minore ad curvaturam in majore

ut

ut 4 ad 1. Unde vis centripetæ quantitas in minore erit ad vis centripetæ quantitatem in majore ut rectangulum $2 \times 4 = 8$, ad rectangulum $1 \times 1 = 1$, sive ut radiorum Cubi reciproce. Et sic ubique.

Coroll. (1.) Cum tempora periodica sint in hoc casu in duplicata ratione radiorum, si temporum periodicorum quadrata sint inter se ut quadrato quadrata radiorum, sive, quod perinde est, si ipsa tempora periodica sint inter se ut radiorum quadrata, erunt vires centripetæ inter se ut radiorum vel distantiarum Cubi inverse, & velocitates inverse ut radii. Et vice versa, si vires centripetæ sint inverse ut distantiarum Cubi, erunt tempora periodica inter se ut radiorum quadrata, & velocitates etiamnum ut ipsi radii inverse.

Coroll. (2.) Si corporis cujusvis centralis attractivi vires centripetæ sint in diversis distantiis à centro suo ut distantiarum istarum Cubi reciproce, erunt corporum in diversis distantiis gyrantium velocitates in ipsa distantiarum ratione reciproca; & tempora periodica in duplicata istarum distantiarum ratione.

Coroll. (3.) Eadem omnia de temporibus velocitatibus & viribus centripetis quibus corpora similes curvarum quarumcunque similium, centraque similiter posita habentium partes describunt, consequuntur ex præcedentium ad circulos speciatim applicatorum demonstrationibus ad casus hosce applicandis.

Scholium. Cum Propositionis 13. casus in corporibus cœlestibus obtineat, nempe quod temporum periodicorum quadrata sunt inter se ubique ut distantiarum Cubi, & quod proinde vires centripetæ sunt ut distantiarum quadrata reciproce, & velocitates in distantiarum istarum ratione subduplicata reciproce; cum inquam hic casus in Systemate mundano isque solus ubique obtineat, uti seorsim colligerunt etiam nostrates Wrennus, Hookius & Halleius, & jam est apud Astronomos receptissimum, idem casus longe nobilissimus in sequentibus erit fusius & diligentius exponendus, dum reliquorum consequentiæ levi

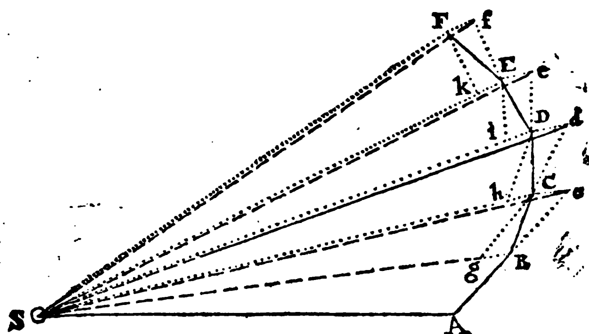
levi dumtaxat opera in transcursu attinguntur. Atque hæc impræsentiarum hactenus. Reliqua in Terminum proxime futurum reservabimus.

Decemb. 11. 1704.

XIII.

XV. AREÆ quas Corpora in gyros acta radiis ad immobile centrum virium ductis describunt, & in planis immobilibus consistunt, & sunt temporibus proportionales, & dato tempore ubique æquales: motus nempe velocitate in distantia minore, & tarditate in distantia majore arearum descriptionem ita moderante, ut ex variis istis distantiis dato tempore nulla spatiorum percursorum differentia unquam oriatur.

Dividatur enim tempus in partes æquales, & prima temporis parte describat corpus vi insita, sive motu projectili rectam lineam quamvis *AB*. Idem corpus secunda æquali temporis parte, si nihil impediret, & nulla alia vis



urgeret recta ad *c* pergeret, describens lineam *Bc* ipsi *AB* æqualem, adeo ut radiis ad centrum *S* ductis confectæ forent æquales areæ *ASB*. *BSc*. Verum ubi corpus ad punctum *B* venit agat vis centripeta, sive attractio sit sive pressio qualiscunque ad centrum *S* tendens, impulsu unico, qui sit ad motum projectilem ut linea

quæ.

quævis *Bg* ad lineam *Bc*, impulsus hic novus efficiet ut corpus à recta *Bc* deflectat & in linea alia pergat, * parallelogrammi nempe *BgCc* diagonali *BC*, ita ut completa secunda temporis parte æquali corpus ad punctum *C* sit inveniendum, in eodem plano cum triangulo *ASB*. junge *SC*, & area radio à corpore ad centrum ducto descripta, hoc est, triangulum *SBC* æquabitur areæ prioris, hoc est, † triangulo *SBc*, atque adeo triangulo primo *SAB* cui nempe ex prius dictis æquale erat triangulum *SBc*. Simili argumento tertia æquali temporis parte corpus a *C* ad *d* vi projectili (quæ semel parta usque perseverat) pertingeret, ita ut linea *Cd* describenda lineæ *CB* nuperrime descriptæ foret æqualis. Sed si vis centripeta quæcunque priore aut minor aut major iterum agat ad punctum *C*, Corpus in fine tertii temporis reperietur alicubi in linea *Dd* ipsi *SC* parallela, & per parallelogrammi cujusdam *hDdC* diagonalem *CD* ad punctum quoddam *D* pertinget, adeo ut triangulum *SDC* triangulo *SdC*, atque adeo reliquis triangulis *SCB SBA* inter se æqualibus sit æquale; pari jure, si vis centripeta successive agat in *D.E.F.* faciens ut corpus singulis temporis particulis æqualibus singulas rectas diagonales describat, jacebunt omnes hæ rectæ lineæ in eodem plano, & triangula *SED SFE* prioribus æqualia describentur. Æqualibus igitur temporibus æquales areæ in plano immoto describuntur: & arearum summæ quævis *SADS SAFS* sunt inter se ut descriptionum tempora. Augeatur jam numerus & minuatur latitudo triangulorum in infinitum, & eorum ultima perimeter, polygoni lateribus in curvam desinentibus, *ADF* erit linea curva, & ob vim centripetam jam continuam & indesinenter agentem, corpus perpetuo retrahetur à curvæ tangentibus, & areæ pari ac prius jure etiamnum in plano immobili descriptæ erunt semper temporibus proportionales. *Q.E.D.*

* *Per Leg. Mot.* 22. *prius.*

† I. 37. *Elem.*

Coroll.

Coroll. (1.) Erit itaque velocitas corporis circa gyrationis centrum, secundum lineam radio perpendicularem æstimata, in ratione distantiarum reciproca; alias enim arearum æqualitas nullo modo observari potest.

Coroll. (2.) Erit quoque velocitas corporis angularis circa virium centrum in duplicata distantiarum ratione reciproca. Nam cum vera velocitas sit in simplici distantiarum ratione reciproca, ut jam vidimus, & centri distantia eo major quo motus est tardior, & in eadem quoque ratione, liquet velocitatem angularem quoad virium centrum esse in duplicata distantiæ ratione reciproca.

Coroll. (3.) Ubi positio tangentis est ad centri distantiam sive radium perpendicularis, & motus projectilis velocitas vim centrifugam corporis centralis vi centripetæ exacte proportionalem vel correspondentem efficit, corpus neque ad centrum appropinquabit, neque ab eodem recedet; sed motu circulari circa centrum illud perpetuo feretur.

Coroll. (4.) Ubi autem positio tangentis est ad radium obliqua, licet motus projectilis velocitas sit vi centripetæ proportionata & correspondens, vis illa centripeta motum vel minimum descendentem aliquantulum conspirando adaugebit; & vel minimum ascendentem aliquantulum sese opponendo diminuet, donec motus adauctus vim centripetam tandem exuperet, & corpus prius descendens ascendat iterum; vel donec motus diminutus vi centripetæ tandem cedat, & corpus prius ascendens descendat iterum.

Coroll. (5.) Ex hujusmodi circumstantiis motus corporum circa centrum quodvis in Ellipsibus gyrantium oriri debent. Nam etsi ad axem minorem Ellipseos, corpore centrali focum occupante; aut ad diametrum mediocrem eodem centrum occupante Corpus inter revolvendum supponatur situm, & velocitas motus projectilis vi centripetæ ad amussim eo loci correspondere etiam supponatur, tamen ob tangentium in iisdem locis positionem obliquam motus non circularis sed ellipticus

orietur.

orietur. Corpore nempe inter descendendum vires quibus postea ascendat paulatim acquirente; & inter ascendendum vires quibus prius ascenderat paulatim amittente; donec superante vi centripeta ad descendendum tandem cogatur. Atque ita perpetuo. Unde patet quo pacto ex eodem motu per obliquam lineam impresso oriatur motus ellipticus; dum idem motus per lineam perpendicularem impressus circuitum omnino circularem genuisset.

Coroll. (6.) In mediis non resistentibus & in loco vacuo si areæ descriptæ non sint describendi temporibus proportionales vires non tendunt ad concursum radiorum. Nam si eo tenderent areæ istæ necessario essent temporibus proportionales, contra hypothesin.

Coroll. (7.) In mediis omnibus si arearum descriptio acceleretur, vires non tendunt ad concursum radiorum, sed cum motu projectili conspirant magis: si arearum descriptio retardetur, plus nimirum quam ex medii resistentia, vires non tendunt ad concursum radiorum, sed motui projectili opponuntur magis.

XVI. Corpus omne quod movetur in linea curva, & radio ad punctum vel immobile, vel motu rectilineo uniformiter progrediens, ducto describit areas circa punctum illud temporibus proportionales, urgetur à vi centripeta tendente ad idem punctum.

CAS. (1.) Ob æqualitatem enim triangulorum *ScB* *SCB* eadem basi *SB* descriptorum puncta *C* & *c* erunt * in linea *Cc* basi parallela; atque adeo figura *BcCg* erit parallelogrammum, cujus *Bc* & *Bg* sunt latera vires exponentia, & *BC* diagonalis; urgetur itaque Corpus ad *B* positum vi *Bg* tendente ad *S* centrum virium; atque ita pariter in punctis omnibus *C.D.E.F.* *Q.E.D.*

Vid. Fig. p. 125.
* I. 39. *Elem.*

CAS. (2.) Et perinde est sive quiescat superficies in qua corpus describit figuram curvilineam; sive moveatur eadem una cum corpore, figura descripta, & puncto suo centrali *S* uniformiter in directum. Unde prioris casus demonstratio in hoc etiam valebit.

Scho-

Scholium. Corpus urgeri poteſt à vi centripeta ex viribus pluribus compoſita, (uti exempli gratia vis gravium in terræ centrum ex viribus in omnes terræ particulas tendentibus compoſita eſt, ut poſtea conſtabit;) in hoc caſu ſenſus propoſitionis eſt, quod vis illa quæ ex omnibus eſt compoſita, cum ad unam eſt reducta, tendit ad centrum virium.

Coroll. (1.) Cum itaque in planetarum primariorum Syſtemate Areæ radiis ad Solis centrum ductis ſint ſemper temporibus proportionales, uti Aſtronomis eſt notiſſimum, urgentur Planetæ vi perpetua ad Solis centrum tendente: neque aliter de ſecundariis circa primarios ſuos, Saturnum nempe, Jovem, & Terram eſt ratiocinandum.

Coroll. (2.) Sicut velocitas diverſorum corporum circa centrum virium, ubi vires illæ ſunt ut quadrata diſtantiarum inverſe, eſt in diverſis circulis in ſubduplicata ratione diſtantiarum inverſa, uti olim demonſtravimus; ita ex hac & præcedenti propoſitione ſequitur, quod velocitas ejuſdem corporis orbitam quamvis eccentricam deſcribentis, in diverſis ſuis à centro diſtantiis poſiti, qualicunque virium centripetarum lege, eſt ut ipſa diſtantia inverſe, ſi nempe velocitas iſta in arcu circulari aut in linea radio perpendiculari, ut prius æſtimetur: cujus diverſæ velocitatis rationis cauſa eſt quod in diverſis circulis áreæ in iſto caſu non ſint utrinque æquales, ſed pro magnitudine diſtantiæ majores & in eadem magnitudinis ratione etiam majores; cum tamen in ejuſdem corporis revolutione æqualitas arearum velocitatem diſtantiæ reciproce proportionalem omnino exigat. Sic ſane ſi Planetæ duo in diverſis circulis circa Solem revolverent, quorum circulorum Radii ratione quadrupla alter alterum excederet, Planeta remotior velocitate alterius tantum dupla ferretur: ſin idem Planeta per Ellipſin valde excentricam curſus ſuos peragens nunc ad diſtantiam majorem nunc minorem, eamque, ut prius, in ratione quadrupla excedentem & deficientem

entem alterius vicibus collocetur, erit velocitas in ipsa distantiarum ratione reciproca, & in distantia minore alterius ad amussim quadrupla: & ita in distantiis quibuscunque. Quod in Systemate quovis Planetario probe meminisse oportebit.

XVII. Corpus omne quod, radio ad centrum corporis alterius utcunque moti ducto, describit areas circa centrum illud temporibus proportionales, urgetur à vi composita ex vi centripeta tendente ad corpus alterum, & ex vi omni acceleratrice qua corpus alterum urgetur. Si enim primo quiescant planum & centrum virium in isto plano, erunt areæ temporibus proportionales; & si eadem celeritate corpora utraque per lineas parallelas accelerentur manebunt areæ temporibus etiamnum proportionales. Unde cum ex hypothesi maneant areæ temporibus proportionales, manebit & vis centripeta earum causa, & vis acceleratrix ubique eadem communis celeritatis causa manebit.

Coroll. (1.) Si corpus quodvis radio ad alterum ducto describat areas temporibus proportionales, atque de vi tota, sive simplici, sive ex pluribus viribus composita, qua corpus prius urgetur subducatur vis tota acceleratrix qua corpus alterum urgetur, vis omnis reliqua qua corpus prius urgetur tendet ad corpus alterum tanquam ad centrum.

Coroll. (2.) Et si areæ illæ sint temporibus quam proxime proportionales, vis reliqua tendet ad corpus alterum quam proxime.

Coroll. (3.) Et vice versa, si vis reliqua tendat quam proxime ad corpus alterum, erunt areæ illæ temporibus quam proxime proportionales.

Coroll. (4.) Si corpus, radio ad alterum corpus ducto, describat areas quæ cum temporibus collatæ sint valde inæquales, & corpus illud alterum vel quiescat vel moveatur uniformiter in directum, actio vis centripetæ ad corpus illud alterum tendentis vel nulla est, vel miscetur & perturbatur ab aliis viribus. Et vis

tota

tota ex omnibus, si plures sint, composita ad aliud sive immobile sive mobile centrum dirigetur, circum quod æquabilis erit arearum descriptio. Idem obtinet ubi corpus alterum motu quocunque movetur, si modo vis centripeta sumatur ea quæ restat post subductionem vis totius agentis in corpus illud alterum.

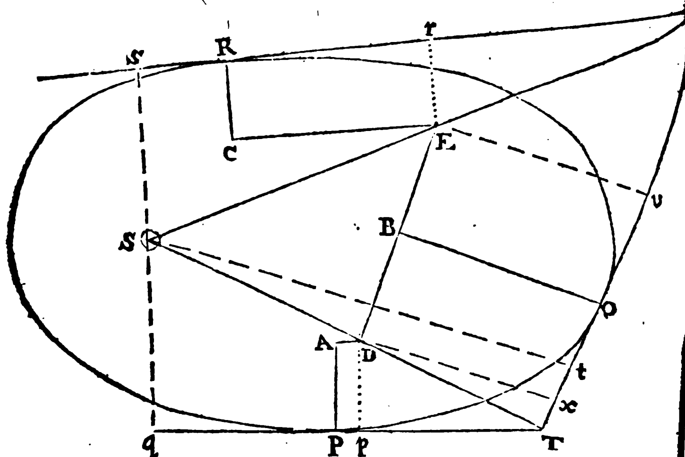
Scholium (1.) Quoniam æquabilis arearum descriptio Index est Centri quod vis illa respicit qua corpus afficitur, corpus autem a vi ad hoc centrum tendente retinetur in curvilinea sua orbita: Et quoniam motus omnis circularis seu in orbem rediens recte dicitur circa centrum illud fieri cujus vi corpus de motu rectilineo retrahitur, & in orbita sua perpetuo retinetur: In sequentibus usurpabimus æquabilem illam arearum descriptionem, ut indicem Centri, circum quod motus omnis circularis, seu in orbem rediens in spatiis liberis peragitur.

Scholium (2.) Spectat propositio hæc 17ª & ejusdem corollaria ad verum mundi systema intelligendum. Quamquam enim motus omnes planetarii ex motu per tangentes projectili semel impresso, & vi centripeta perpetuo urgente sint derivandi, attamen centra illa ad quæ vires centripetæ tendunt & ipsa moventur una cum corporibus circumvolventibus. Sic sane circulationes Circumsaturniorum, Circumjovialium, & Lunæ ex motu projectili singulis semel impresso, & ex vi centripeta in Saturni, Jovis & Telluris centra respective tendente oriuntur; licet ipsa interea centralia illa corpora cum satellitio suo universo moveantur una circa Solem, commune omnium planetarum primariorum centrum.

XVIII. *Problema.* Data tribus quibuscunque in locis velocitate qua corpus figuram datam, viribus ad commune aliquod punctum seu centrum tendentibus, describit centrum illud invenire.

Figuram descriptam tangant tres rectæ *PT*, *TQV*, *VR* in punctis totidem *P*. *Q*. *R*. concurrentes in *T*, & *V*.

Ad tangentes in punctis contractuum erigantur perpendicula *P A*. *Q B*. *R C*. velocitatibus corporis in punctis illis *P*. *Q*. *R*. a quibus eriguntur reciproce proportionalia. Id est, ita ut sit *P A*, ad *Q B*, ut velocitas in *Q*, ad velocitatem in *P*. & *Q B*, ad *R C*, ut velocitas in *R*, ad velocitatem in *Q*. Ad perpendiculorum terminos *A*. *B*. *C*. ad angulos rectos seu tangentibus parallelæ ducantur *A D*. *D B E*. *E C*. concurrentes in *D* & *E*.



Ducantur *T D* & *V E* in puncto *S* se intersecantes. A puncto *E* sint *E r* & *E v* perpendiculis *C R* & *B Q* respective parallelæ. Et pariter a puncto *D* sint *D p* & *D x* perpendiculis *A P* & *B Q* respective parallelæ. Denique a puncto *S* sint *S s*. *S t*. *S q*. iisdem perpendiculis respective parallelæ seu tangentibus perpendiculares. punctum *S* erit centrum quæsitum.

Per Prop. 15. prius.

Scholl. post I, 41. Elem.

Cum enim corpus revolvens, & in punctis *P* & *Q* successive, positum radiis ad centrum virium ductis æquali tempore æquales areas, seu triangula minima æqualia semper describat; cum etiam triangula illa simul descripta sint ut velocitates

tes five lineæ simul descriptæ in *P* & *Q* ductæ respective in perpendicula à centro in tangentes *PT* *QT* dimissa. Erunt itaque perpendicula illa ut velocitates reciproce, adeoque ut perpendicula *Dp* & *Dx* directe. Sed propter triangula similia *TDx TSt* & *TDp TSq*. Ut est *Dp* ad *Dx*, ita est perpendiculum *Sq* ad perpendiculum *St*. Et pari cum proribus jure erit ut *Ev* ad *Er*, ita perpendiculum *St* ad perpendiculum *Ss*. Et cum hoc in solo linearum *TD* & *VE* concursu *S* utrinque potest esse verum, quod necessarium est in hoc casu, liquet punctum *S* esse virium centripetarum centrum. *Q. E. D.*

Jan. 29°. 170$\frac{4}{5}$.

XIV.

XIX. SI Corpus moveatur in Ellipsi circa ejusdem centrum, erit vis centripeta directe ut distantia corporis ab eodem centro. Est enim curvatura ubique in arcubus similibus in quadruplicata ratione distantiæ: velocitas autem in ejusdem distantiæ ratione simplici inverse. Unde curvatura dato tempore descripta erit in duplicata ratione distantiæ, & velocitas in ratione simplici distantiæ inverse, & vis centripeta, excessu rationis curvaturæ supra velocitatis rationem in hoc casu æstimanda, erit directe ut distantia. *Q. E. D.*

Corollarium. Si Ellipsis centro in infinitum abeunte vertatur in Parabolam, corpus movebitur in hac parabola, & vis ad centrum infinite distans jam tendens evadet æquabilis, Hoc est Theorema Galilæi, à nobis alia methodo demonstratum supra. Et si coni sectio Parabolica, inclinatione plani ad conum sectum mutata vertatur in Hyperbolam, movebitur corpus circa Centrum in hujus perimetro, vi centripeta in cen- *Prop.* 8.

trifugam versa, & vi illa centrifuga majori existente in minori distantia, minori vero in majori distantia; uti virium adeo contrariarum ratio omnino exigit.

Coroll. (2.) Si vis centripeta corporis cujusvis attractivi sit directe ut distantia, ita ut in majori distantia attractio sit in eadem ratione etiam major, & in minori minor, Corpus movebitur in Ellipsi circa corpus centrale in ipso ellipseos centro positum, aut forte in circulo in quem ellipsis migrare potest: scilicet pro tangentium situ, de quo prius, corpus aut in circulo aut in ellipsi movebitur.

Coroll. 3, 4 *&* 5. *post Prop.* 15.

Coroll. (3.) Et æqualia erunt revolutionum in figuris universis circa centrum idem factarum periodica tempora; uti olim quoque ostendimus.

Coroll. 2. *Prop.* 9.

XX. Si corpus moveatur in spirali, secante radios omnes in eodem angulo, vis centripeta erit reciproce ut cubus distantiæ a spiralis centro. Est enim in harum spiralium diversis partibus curvatura arcuum similium æqualis; æqualium vero reciproce ut distantia. Sed dum corpora in spiralibus revolvunt erit ubique celeritas reciproce ut distantia, & inde etiam curvatura, dato tempore, reciproce in duplicata distantiæ ratione. Ergo vis centripeta ex curvaturæ & celeritatis rationibus conjunctis oriunda erit in triplicata distantiæ ratione reciproce, sive reciprocè ut cubus distantiæ.

Corollarium. Si corporis cujusvis attractivi vires sint in triplicata distantiarum à centro suo ratione reciproce, corpora omnia quorum motuum projectilium directiones non sunt ad radios perpendiculares cum velocitate quacunque exeuntia movebuntur in spirali, secante radios omnes in angulo dato: & si corpus primum ascendat, ascendet in infinitum; si descendat descendet ad centrum, temporis spatio ex areæ spiralis quantitate facile inveniendo.

Scholium. Si qua esset curva regularis cujus curvatura à quovis puncto centrali esset in duplicata distantiæ

ſtantiæ ratione directe, corpus quodvis in ea revolveret, ſi modo vires centripetæ ad punctum centrale eſſent inter ſe in ipſa diſtantiarum ratione reciproca. Nam ſi curvatura in æqualibus angulis ſit ex hypotheſi in duplicata diſtantiæ ratione directe, erit curvatura dato tempore ſemper ſibi æqualis in diſtantiis omnibus; & cùm velocitas ſit ſemper ut diſtantia reciproce, erunt vires centripetæ, ex curvatura & velocitate conjunctis æſtimandæ, ut diſtantia reciproce, & corpus in iſta curva movebitur. *Q.E.D.*

Sic etiam, ſi qua eſſet curva regularis cujus curvatura à quovis puncto centrali eſſet in triplicata diſtantiæ ratione directe, quodvis corpus in ea revolveret, ſi modo vires centripetæ ad punctum centrale eſſent in omnibus diſtantiis æquales. Nam ſi curvatura in æqualibus angulis ſit ex hypotheſi in triplicata ratione diſtantiæ directe, erit curvatura dato tempore ſemper ut diſtantia directe: & cum velocitas ſit ſemper ut diſtantia reciproce, vires centripetæ ob æqualitatem rationum directæ & reciprocæ erunt ubique æquales, & corpus in iſta curva movebitur.

XXI. Si corpus moveatur in Ellipſi circa ejuſdem focum, vis centripeta erit ubique in duplicata ratione diſtantiæ ab eodem foco reciproce.

Eſt enim uti olim notavimus in ellipſium & parabolarum & hyperbolarum partibus diverſis quoad focum curvatura ubique in arcubus ſimilibus directe ut diſtantia, & in partibus æqualibus ſemper æqualis. Eſt autem velocitas ubique in diſtantiæ ratione reciproca. ergo in arcubus ſimul deſcriptis curvatura eſt reciproce ut diſtantia à foco, atque in eadem ratione reciproca eſt etiam celeritas: unde vis centripeta ex curvaturæ & celeritatis rationibus conjunctis æſtimanda erit in duplicata ratione diſtantiæ à foco reciproce. *Q.E.D.*

Coroll. (1.) Si corporis cujuſvis attractivi vires ſint in duplicata ratione diſtantiarum à centro ſuo reciproce, corpora omnia, ſaltem quorum motuum projectilium directio-

nes non sunt ad radios perpendiculares, cum quacunque etiam motus velocitate, movebuntur in Ellipsibus, quarum focos, hoc est, focorum alterum corpus centrale occupabit, nisi motuum projectilium tanta sit velocitas ut Ellipses in Parabolas aut etiam hyperbolas convertere possit.

Coroll. (2.) Si corpus ex lege vis centripetæ hic assignata in Ellipsi circa focorum alterum gyretur, erit tempus periodicum corporis in Ellipsi moventis, ad tempus periodicum corporis in circulo, cujus radius est inter distantiam maximam & minimam intermedius, sive semiaxi majori æqualis in ratione æqualitatis. Cum enim curvatura absoluta Ellipseωs integra sit circuli curvaturæ æqualis, & summa velocitatum absolutarum in paribus arcubus supra & infra mediocrem distantiam sit semper ob motum in æquali arcu æqualiter mutatum velocitati in circulo mediocri æqualis, liquet vim centripetam esse æqualem, & proinde tempora periodica quoque esse inter se æqualia. Vel sic potius demonstrabimus. Ponatur eadem in mediocri distantia velocitas absoluta, quæ est in circulo eadem semidiametro descripto, erit tum ex Conicis angulus sive area descripta in circulo, ad angulum sive aream in Ellipsi simul descriptam, ut semiaxis major, ad minorem: & in eadem quoque ratione, ex Conicis, est area integra circuli ad aream integram Ellipseωs. Unde propter æquabilem arearum descriptionem utrinque, erunt & utrinque tempora periodica inter se æqualia.

Coroll. (3.) Sunt ergo tempora periodica in Ellipsibus inter se in ratione axium majorum sesquialtera, æque ac in circulis.

Coroll. (4.) Proinde dato axe majore, datur una tempus periodicum.

Coroll. (5.) Cum eadem sit curvaturæ & celeritatis ratio in Parabola atque Hyperbola respectu focorum quam modo in Ellipsi observavimus, corpus pari ac prius jure ex viribus in ratione distantiæ duplicata reciproce

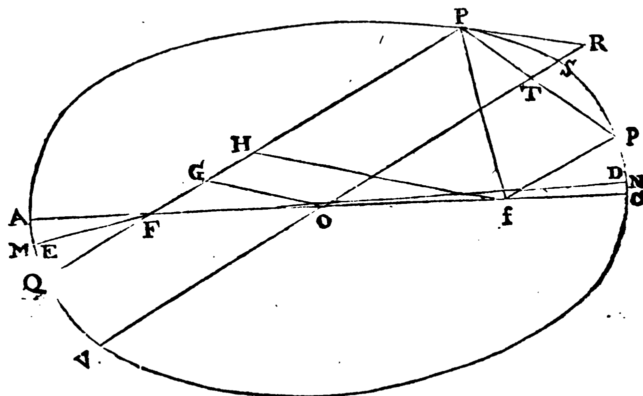
mutatis

mutatis movebitur in Parabola aut Hyperbola circa focum.

Scholium. Peractis jam faciliori methodo fundamentalium Newtoni Propositionum demonstrationibus; liceat mihi, coronidis loco, aliam Propositionis postremæ omnium longe nobilissimæ, & ad Systema mundanum maxime accommodatæ demonstrationem, ad rigorem geometricum magis compositam, qualem nempe eam è charta MS Ipsius Newtoni olim acceperam, hic loci attexere.

Propositio. Si corpus quodvis versus Ellipseos focum attrahatur, & si attractionis quantitas & ratio sit hujusmodi ut corpus in perimetro elliptica revolvere efficiant, erit attractio in distantia minima, ad attractionem in distantia maxima, ad majorem nempe axem utraque, ut quadrata distantiarum corporis in istis punctis ab Ellipseos foco reciproce.

Sit *AECD* Ellipsis: *A* & *C* axis majoris extremitates: *F* focus iste quo tendit vis centripeta: & *AFE*



CFD areæ illæ quas corpus radiis ad focum ductis æquali temporis spatio describit. Sunt autem areæ illæ inter se æquales, utpote temporibus æqualibus proportionales. *Prop. 15. prius.*

Hoc

Hoc est, rectangula $\frac{1}{2}$ *AF* × *AE* & $\frac{1}{2}$ *FC* × *DC*, sunt inter se æqualia; ex hypothesi nimirum quod arcus *AE* & *CD* adeo exigui sumuntur ut pro lineis rectis tuto haberi possint. Ergo *AE* est ad *CD* ut *FC* ad *FA*. Supponamus jam lineas rectas *AM* & *CN* ellipsin in punctis *A* & *C* tangere, & lineolas *EM* & *DN* [in figura supplendas] esse à punctis *E* & *D* in tangentes illas perpendiculares. Quoniam curvatura Ellipsium (si nempe eandem in genere spectemus, & in arcubus æqualibus quoad ejusdem centrum) sit ad utramque extremitatem æqualis, Perpendicula illa *EM* & *DN* erunt inter se ut arcuum *AE* & *CD* quadrata. Est ergo *EM* ad *DN* ut *FC* quadratum, ad *FA* quadratum. Eodem autem tempore quo corpus ex attractionis vi describet arcus ellipticos *AE* & *CD*, ab *A* ad *E*, & à *C* ad *D*; idem absque illa attractione tangentes *AM* & *CN* arcubus æquales descripsisset. Sunt ergo attractionum vires quæ corpus è tangentibus ad curvam, nempe ab *M* ad *E*, & ab *N* ad *D* trahunt, & inter se ut lineolæ illæ, angulorum contactus subtendentes, eodem tempore genitæ *ME* & *ND*. Est ergo Attractio in puncto *A*, ad attractionem in puncto *C*, ut lineola *ME*, ad lineolam *ND*. Hoc est, ex jam demonstratis, ut *FC* quadratum ad *FA* quadratum. Sive ut distantiarum quadrata reciproce. *Q.E.D.*

Schol. post. I. 41. Elem.

VI. 14. Elem.

Coroll. 4. Prop. 2. supra.

Hæc demonstratio solas respicit ellipsium extremitates; quæ sequuntur eandem propositionem quibuscunque ellipsium partibus applicabunt.

Lemma. Si linea recta in puncto quocunque ellipsin tangat, & si linea tangenti isti parallela ducatur per Ellipseωs centrum, quæ lineam tertiam per contactus punctum & focorum alterutrum ductam intersecet, pars lineæ istius tertiæ inter contactum & intersectionem posita erit axis majoris semissi æqualis.

Sit *APCQ* Ellipsis: *AC* axis major: *O* centrum:

Ff foci: *P* contactus punctum: *OG* linea tangenti parallela: & *PG* lineæ *FP* pars inter contactum & tangenti parallelam. Dico quod *PG* est ipsi *CO*, sive axis majoris semissi æqualis. *Vid. Fig. p.* 137.

Junge enim puncta *Pf*: & duc lineam *fH* ipsi *OG* parallelam. Et quoniam lineæ *Ff* & *FH* bisectæ sunt in punctis *O* & *G*, erit *AC* summæ linearum *PF* & *Pf*, hoc est, summæ linearum *PF* & ex Conicis *PH*, sive duplæ lineæ *PG* æqualis. Est ergo semissis *AC*, hoc est *CO*, lineæ *PG* æqualis. *Q. E. D.*

Lemma Alterum. Linea recta quævis per Ellipseos focum alterutrum ad peripheriam ducta, se habet ad Diametrum Ellipseos lineæ eidem parallelam, ut eadem Diameter se habet ad majorem Ellipseos axem.

Sit *APCQ* Ellipsis: *AC* axis major: *F. f.* foci: *O* centrum: *PQ* linea quævis per focum *F* ducta: *VOS* diameter Ellipseos lineæ *PQ* parallela. Erunt *PQ. VS. AC* ∺. *Vid. Fig. p.* 237. Ducatur enim *fp* ipsi *QFP* parallela; quæ etiam Ellipseos perimetrum secet in puncto *p*. puncta *P. p* junge linea *Pp*, lineam *VS* in puncto *T* secante. Duc lineam *PR*, quæ nempe Ellipsin in puncto *P* contingat, & diametrum *VS* productam in *R* secet. Erunt jam ex conicis *OT* : *OS* : *OR* ∺. Est autem *OT* ipsarum *FP* & *Fp*, sive *FP* & *FQ* semisumma: atque adeo *OT* duplicata ipsi *PQ* est æqualis. Est etiam *OS* duplicata ipsi *VS* æqualis. Et per Lemma jam demonstratum *OR* sive *PG* duplicata ipsi *AC* æqualis est. Quocirca *PQ. VS. AC.* ∺. *Q.E.D.*

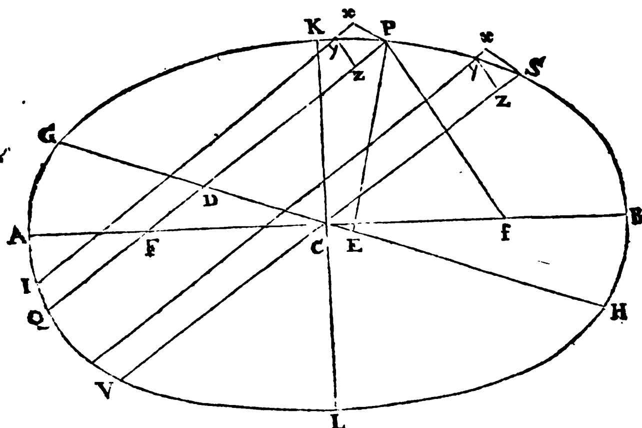
Corollarium. $AC \times PQ = VSq = 4OSq.$

Lemma Tertium. Si ab alterutro Ellipseos foco ad quodvis in ejus perimetro punctum ducatur recta linea *FP*: & ad punctum *P* Ellipseos tangens *Px*; Et si isti contactus angulo subtendatur lineola *xy* lineæ *PQ* parallela; rectangulum subtensæ lineolæ, & ejusdem lineæ ad remotiorem perimetri partem productæ, est ad rectangulum majoris Ellipseos axis, & primæ lineæ

ad

ad Ellipseωs etiam perimetrum productæ, ut distantiæ perpendicularis inter subtensam lineolam & lineam primam quadratum, ad axis Ellipseωs minoris quadratum.

Esto *AKBL* Ellipsis: *AB* axis major: *KL* axis minor: *C* centrum: *F. f* foci: *P* punctum quodvis in perimetro designatum: *FP* linea prima, per focum nempe *F* ad *P* ducta: *PQ* linea eadem ad Ellipsin producta: *Px* tangens: *xy* lineola angulo contactus subtensa: *xI* eadem subtensa ad remotiorem perimetri partem producta: *yz* distantia perpendicularis subtensæ & lineæ primæ. Dico quod rectangulum *yxI*, est ad rectangulum *AB* × *PQ*, ut est *yz* quadratum,



ad *KL* quadratum. Esto enim *VS* Ellipseωs diameter lineæ primæ parallela, & *GH* diameter altera tangenti *Sx* parallela, sive diameter diametro priori conjugata. Erit tum ex Conicis rectangulum *yxI*, ad *Px* quadratum, sive tangentis quadratum, ut rectangulum *SCV*, ad rectangulum *GCH*: hoc est, ut *SV* quadratum, ad *GH* quadratum: Sunt quoque ex Conicis parallelogramma omnia circa diametros Ellipseωs conjugatas descripta inter se æqualia. Unde rectangulum duplæ *PE* in *GH*, æquale erit rectangulo

axium

axium *AB* in *KL*. Et per consequens *GH*, est ad *KL*, ut *AB*, hoc est, per Lemma primum nuperrime demonstratum, dupla *PD*, ad duplam *PE*: sive, ob similitudinem triangulorum *yzP* & *PED*, ubi nempe punctum *y* cum puncto *P* coalescit, ut *Px* ad *yz*. Est ergo *Px*, ad *GH*, ut *yz*, ad *KL*: atqve adeo *Px* quadratum, ad *GH* quadratum, ut *yz* quadratum, ad *KL* quadratum. Est autem ex jam assumptis *Px* quadratum, ad *GH* quadratum, ut rectangulum *yxI*, ad *SV* quadratum: & *SV* quadratum (per Lemmatis secundi corollarium) est æquale rectangulo *AC* in *PQ*. Est ergo rectangulum *yxI*, ad rectangulum *AC* in *PQ*, ut *yz* quadratum, ad *KL* quadratum. *Q. E. D.*

VI. 14. *Elem.*

VI. 22. *Elem.*

Coroll. (1.) Si detur *yz*, & per consequens *yz* quadratum, dabitur etiam *yx* quadratum, & per consequens *yx*. Hoc est, si distantia perpendicularis minima puncti in perimetro elliptica sumpti à linea per focum detur, in diversis quibuscunque à foco isto distantiis; dabitur lineola evanescens angulo contactus ibidem subtensa. Nam ex modo demonstratis, cum *yz* ex hypothesi detur, & detur etiam *KL*; & cum ut rectangulum *yx* in *xI*, ad rectangulum *AC* in *PQ*, ita est *yz* quadratum, ad *KL* quadratum: Et, *xI* linea in lineam *QP* ultimo desinente, erit ut $yx \times PQ$, ad $AC \times PQ$, ita *yz* quadratum, ad *KL* quadratum. Sed ut $yx \times PQ$, ad $AC \times PQ$, ita est *yx*, ad *AC*. Est ergo ut *yx*, ad *AC*, ita *yz* quadratum, ad *KL* quadratum: & invertendo, ut *KL* quadratum, ad *yz* quadratum, ita est *AC* ad *yx*; cum ergo reliqua dentur, dabitur & subtensa *yx*. *Q. E. D.*

VI. 1. *Elem.*

Coroll. (2.) Liceat & mihi hic loci inferre quod curvatura Ellipseωs quoad focum est ubique in ipsa distantia à foco ratione directe. Cum enim *yz* subtensa evane-

vanescens anguli contactus in data distantia perpendiculari in omnibus à foco distantiis sit eadem, erit yx in distantiis radio *FP* proportionalibus in angulis æqualibus, in † duplicata radiorum ratione directe. A qua ratione duplicata dempta, ut oportet, radii ratione, relinquetur curvaturæ ratio in diversis distantiis; eadem nempe cum directa radiorum ratione. Quanquam itaque diversorum circulorum in angulis iisdem curvatura circa centrum sit ubique æqualis; in Ellipsibus tamen è contra in diversis à foco distantiis continuo mutatur, & in majori distantia evadit major, in minori minor; atque id in ipsa distantiæ auctæ aut diminutæ ratione. Uti prius annotavimus.

† *Per Coroll.* 4. *Prop.* 2. *prius.*

Coroll. (3.) Liceat quoque & mihi utrumque corollarium ad Parabolam & Hyperbolam traducere. Quæ enim de Ellipsi semel demonstantur, etiam & Parabolis congruunt; propter Ellipsium infinite oblongarum & Parabolarum coincidentiam. Ea etiam quæ Ellipsibus & Parabolis congruunt symptomata, ob mutuam omnium sectionum conicarum congruentiam, mutatis rite mutandis sunt Hyperbolæ applicanda. Quare asserere jam licet, & subtensam angulo contactus evanescentem ad æquales à radio distantias perpendiculares, quoad omnes à foco distantias, in quavis sectione Conica esse sibi semper æqualem; & curvaturam proinde in angulis æqualibus esse in ratione distantiarum directa.

Febr. 5. 170$\frac{4}{5}$.

XV.

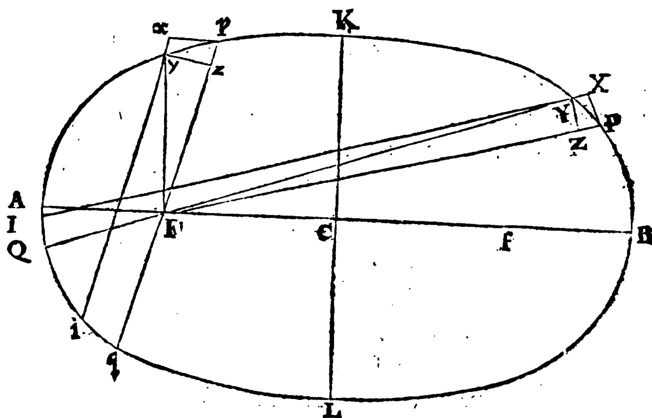
Scholium. SIMILI fere ratiocinio quo Newtonus ad subtensarum evanescentium rationes quoad Ellipseos focum investigandas usus est, etiam & mihi liceat uti ad rationes earundem subtensarum in Ellipsibus

quoad centrum determinandas. Scilicet per ejusdem Newtoni demonstrata. Est yz quadratum, in SC quadratum, applicatum ad yx lineam; æquale duplo KC quadrato in CB quadratum ad SC lineam applicato; sive $yzq \times SC$ cub. $= 2KCq \times CBq \times yx$. Si detur itaque zy, & per consequens zy quadratum, ob datum etiam solidum $2KCq \times CBq$. Erit yx ubique ut SC cubus, sive in triplicata distantiæ ratione directe. Si itaque, ut oportet, zy sumatur ut distantia, ob subtensam anguli contactus in ratione arcus duplicata, erit yx subtensa in ratione distantiæ quintuplicata; sive, dempta distantiæ ratione, erit ipsa curvatura etiamnum in ratione distantiæ quadruplicata directe; sive ut quadrato-quadratum distantiæ directe.

Princip. Math. Lib. 1. Prop. 10.

Propositio altera. Si corpus ad Ellipseos focum alterum attrahatur, & ex attractione ista in perimetro elliptica revolvat, attractionis vires erunt ubique ut distantiarum ab eodem foco quadrata reciproce.

Esto P corporis in Ellipsi revolventis quovis temporis



momento locus, & PX Ellipseos in puncto isto Tangens; per quam tangentem corpus uniformi motu pergeret, si nulla

nulla attractione afficeretur: Sit punctum *X* locus quo corpus dato quovis temporis spatio quam minimo vi sola projectili pertingeret: & sit *Y* locus in perimetro Ellipseωs quo ex viribus conjunctis eodem dato tempore revera pertingit. Dividatur tempus in partes æquales quam minimas, ut quasi momenta physica haberi possint: Agat etiam attractio non perpetuo, sed per intervalla, etiam quam minima; semel nimirum quovis momento physico ineunte; ita ut prima attractionis vis ad punctum *P*, secunda ad *Y* agat, & ita paribus semper intervallis in perpetuum: Ita ut corpus per chordam arcus *PY*, & deinde per chordam arcus sequentis, & ita deinceps moveatur. Quoniam vero Attractio in puncto *P* versus punctum *F* dirigitur, & corpus à tangente *PX* in chordam *PY* detrahit; lineola *XY* à vi attractionis in *P* genita erit vi isti proportionalis, & ipsius directionis, hoc est, lineæ *PF* parallela. Produc lineas *XY* & *PF* ad perimetrum ellipticam in *I* & *Q*: junge puncta *F*, *Y*: & ipsi *FP* demittatur perpendicularis *YZ*. Sit *AB* Ellipseωs axis major, & *KL* axis minor. Et per Lemma tertium erit rectangulum *YXI*, ad rectangulum *AB* × *PQ*, ut est *YZ* quadratum, ad *KL* quadratum. Et per consequens *YX* linea æquabitur solido ex *AB*, in *PQ*, in *YZ* quadratum, ad solidum ex *XI*, in *KL* quadratum applicato. Eodem modo si *py* sit chorda arcus alterius elliptici, quam corpus dato temporis momento physico priori æquali describit; & *px* Ellipseωs in puncto *p* tangens; & *xy* anguli contactus evanescentis subtensa, ipsi *pF* parallela; & si *pF* & *xy* productæ Ellipseωs perimetrum in *q* & *i* secent; & à puncto *y* in ipsam *pF* demittatur perpendicularis *yz*, subtensa *yx* pari ac prius jure æquabitur solido ex *AB*, in *pq*, in *yz* quadratum, ad solidum ex *xi* in *KL* quadratum applicato: hoc est, ob immutabiles & datas

Vid. Fig. p. 143.

AB & *KL*, ut $\frac{PQ}{XI}YZ$ quadratum, ad $\frac{pq}{xi}yz$ quadratum. Sed quoniam lineæ *PY*, *py* à corpore revolvente æqualibus temporibus deſcribuntur, areæ deſcriptæ, ſive triangula *PYF* *pyF* ſunt æqualia: atque adeo rectangula eorum triangulorum dupla $PF \times YZ$, & $pF \times yz$ ſunt æqualia: & *YZ*, eſt ad *yz*, ut *pF*, ad *PF*: & per conſequens $\frac{PQ}{XI}YZ$ quadratum, eſt ad $\frac{pq}{xi}yz$ quadratum, ut eſt $\frac{PQ}{XI}pF$ quadratum, ad $\frac{pq}{xi}PF$ quadratum. Eſt ergo *YX*, ad *yx*, ut $\frac{PQ}{XI}pF$ quadratum, ad $\frac{pq}{xi}PF$ quadratum; hoc eſt, attractio in *P*, eſt ad attractionem in *p*, ut $\frac{PQ}{XI}pF$ quadratum, ad $\frac{pq}{xi}PF$ quadratum. Ponamus jam tempora æqualia, quibus corpus ſubtenſas *PY* & *py* deſcribit, eſſe infinite parva; ita ut attractio fiat continua; & corpus in ipſa Ellipſeωs perimetro revolvat. Coaleſcent in hoc caſu lineæ *PQ* & *XI*, & illæ etiam *pq* & *xi*, æquales jam factæ; atque proinde quantitates $\frac{PQ}{XI}pF$ quadratum, & $\frac{pq}{xi}PF$ quadratum, evadent *pF* quadratum, & *PF* quadratum. Erit itaque attractio in *P*, ſive lineola *XY*, ad attractionem in *p*, ſive lineolam *xy*, ut eſt *pF* quadratum, ad *PF* quadratum; ſive ut diſtantiarum à foco quadrata reciproce. *Q.E.D.*

Et eadem propoſitio ad Parabolam, utpote Ellipſium extremam, pari jure eſt applicanda. Nec non ad Hyperbolam etiam extendi debet: ſed cum nulla corpora cœleſtia nobis cognita in Hyperbolis gyrentur, de peculiari demonſtratione eiſdem applicanda minus hoc in loco ſolliciti ſumus. Qui eam deſiderant apud Newtonum facile reperient. *Prop.* 12.

XXII. Corporis in linea Parabolica moventis circa corpus attractivum in foco positum, cujus vires sunt in ratione duplicata distantiarum reciproca, velocitas est ubique, ad velocitatem corporis revolventis in circulo ad eandem distantiam, in subduplicata numeri binarii ad unitatem ratione; sive ut Diameter quadrati ad latus, hoc est, in ratione 10 ad 7 fere.

Cum enim distantia corporis à centrali corpore ponatur utrinque eadem, erit vis attractionis sive lineola angulo contactus utrinque subtensa, dato quovis temporis spatiolo, utrinque æqualis. Et velocitas in Parabola, erit ad velocitatem in Circulo, ut Parabolæ tangens, ad Circuli tangentem; ubi nempe subtensa est utrinque æqualis. Est vero tangens minima in Parabola ex conicis æqualis rectanguli subtensæ in latus rectum verticis cujusque ductæ radici quadraticæ. Et tangens minima in circulo æqualis rectanguli subtensæ in circuli diametrum ductæ radici quadraticæ. Sed ob datam utrinque subtensam, & verticis Parabolæ latus rectum ex conicis circuli diametri duplum; sive ut 2 ad 1. erit rectangulum prius posterioris etiam duplum, vel ut 2 ad 1. unde tangentes, sive radices quadraticæ erunt inter se ut radix quadratica numeri binarii, ad unitatem; sive ut diameter quadrati ad latus. Hoc est, fere ut 10 ad 7. *Q.E.D.*

III. 36. *Elem.*

Coroll. (1.) Cum itaque velocitas in Parabola, sit ad velocitatem in circulo, ad eandem à foco distantiam, in ratione data; nimirum $\sqrt{.}\,2$ ad 1. & cum velocitas in diversis circulis sit in subduplicata radiorū ratione reciproca, erit quoque velocitas corporis parabolam describentis in diversis à foco distantiis in subduplicata distantiarum ratione reciproca.

Coroll. (2.) Velocitas corporis in Ellipsi gyrantis est minor quam in Parabola ad eandem distantiam à foco; & velocitas corporis in Hyperbola gyrantis est major quam in Parabola ad eandem distantiam: Unde velocitas in Ellipsi, erit ad velocitatem in Circulo ad eandem distan-

Vid. pag. 23. *prius.*

ſtantiam, in minore ratione quam √. 2 ad 1. & in Hyperbola velocitas erit, ad velocitatem in circulo, ad eandem diſtantiam, in majore ratione quam √. 2 ad 1.

Coroll. (3.) Cognita itaque corporis ad diſtantiam quamvis à foco velocitate, cognoſcetur trajectoriæ figura; utrum illa nimirum ſit Circulus, Ellipſis, Parabola, vel Hyperbola. Et ex accuratiore calculo ſi ſit Ellipſis, vel Hyperbola, quænam ſit earum figurarum ſpecies quam corpus revolvens deſcribere debeat.

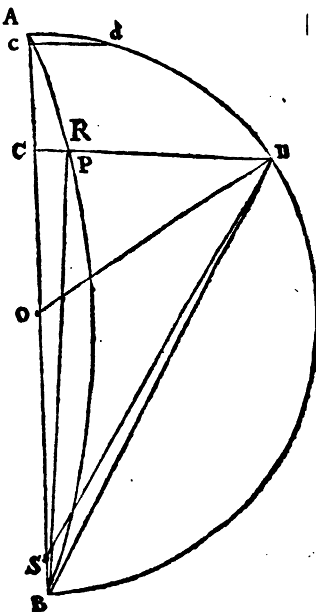
Coroll. (4.) Ex noviſſime demonſtratis conſequens eſt quod ſi corpus quodvis, ſecundum lineam quamvis rectam, (niſi ea ad ipſum focum directe tendat,) quacunque cum velocitate exeat, & vi centripeta quæ ſit reciproce proportionalis quadrato diſtantiæ à centro ſimul agitetur, movebitur hoc corpus in aliqua ſectionum conicarum, umbilicum habente in centro virium. Nimirum, ſi linea ſecundum quam corporis motus projectilis tendit ſit radio perpendicularis, & velocitas ſit attractioni æquipollens; hoc eſt, ſi velocitas dato tempore quovis minimo ſit rectanguli ex ſubtenſa anguli contactus iſtius circuli, vel ſinu verſo, in ejuſdem circuli diametrum ducto radici quadraticæ æqualis; movebitur corpus in circulo. Si autem velocitas ſit attractioni æquipollens, & linea directionis ad radium obliqua, corpus movebitur in Ellipſi, cujus tempus periodicum erit tempori periodico circuli, in quem migrare potuit, æquale. Sin velocitas ſit velocitate prius aſſignata aut major aut minor, ita tamen ubi major eſt, ut ultra rationem radicis quadraticæ numeri binarii ad unitatem non augeatur, corpus movebitur in Ellipſi, circulo in priore caſu majore, in poſteriore minore. Quod ſi velocitas ſit, ad velocitatem in circulo, ut radix quadratica numeri binarii, ad unitatem, corpus movebitur in Parabola. Si denique velocitas ſit adhuc major, corpus in Hyperbola movebitur.

XXIII. *Probl.* Poſito quod vis centripeta ſit reciproce

proportionalis quadrato diſtantiæ locorum à centro, tempora definire quibus corpora rectà cadendo centrum attingent.

Eodem axe principali, ſive diametro tranſverſa, *AB*, deſcriptæ ponantur Ellipſium utrinque extremæ, circulus nimirum, *ADB*, & recta linea *AB*. Ex æqualitate harum diametrorum tranſverſarum erunt tempora periodica utrinque æqualia; & proinde ſemirevolutionum tempora erunt ſibi invicem æqualia. Hoc eſt tempus deſcenſus per diametrum, æquale tempori revolutionis per ſemicircumferentiam. Cum itaque ex prius demonſtratis facile ſit tempus iſtud ſemirevolutionis determinare, exinde quoque facile fuerit tempus deſcenſus directi definire. Exempli gratia. Tempus ſemiperiodi Lunaris continet minuta prima 19.671 L5. Ubi nempe ejus Orbitæ diameter eſt diſtantiæ ſuæ mediocris à terræ centro dupla. Et eſt tempus hoc, ad tempus ſemiperiodi ad diſtantiam dimidiam, quod nunc quærimus, in ſeſquialtera ratione diſtantiarum; hoc eſt, fere ut 2828 ad 1000. ſive ut 19.671 L5 ad 6.955 L5. Unde tempus ſemiperiodi in diſtantia prioris dimidia, (ubi nempe diſtantia integra Lunæ ſive orbitæ ſemidiameter circuli diameter evadit,) hoc eſt tempus corporis ad Lunæ diſtantiam poſiti, & directe cadentis in terræ

Coroll. 4. poſt Prop. 21. prius.



:æ centrum, erit minutorum primorum 6.955L5. e dierum 4. horarum 19. minutorum primorum 55. secundorum 30. Et hoc temporis spatio ipsa Luna, notus ejus sisteretur, & tellus maneret immobilis, ab ita sua ad telluris centrum caderet. Et simili ratio- io tempus casus cujusvis Planetæ à motu suo cessan- & deorsum in Centrum cadentis satis facile poterit de- mi nari; uti in proximo Scholio fiet.

Scholium. Cum itaque tempus cujusque Planetæ se- periodi, diminutum in ratione 1000 ad 2828, sit tem- casus directi in centrum, sequens tabella, eo fun- nento innixa, planetarum omnium in centra sua caden- m tempora exhibebit.

		dier.	hor.
Mercurius,	*in Solem caderet spatio*	15	13
Venus,		39	17
Terra,		64	14
Mars,		121	11
Jupiter,		767	3
Saturnus,		1900	4

Planetarum Circumjovialum

Intimus,	*in Jovem caderet spatio*	00	7
Secundus,		00	15
Tertius,		1	6
Quartus,		2	23

Planetarum Circumsaturniorum

Intimus,	*In Saturnum caderet spatio*	0	8
Secundus,		0	12
Tertius,		0	19
Quartus,		2	20
Quintus,		14	1
Luna in Terram caderet spatio		4	20

Febr. 19. 170⅚.

XVI.

XXIV. PROBLEMA. Posito quod vis centripeta sit reciproce proportionalis quadrato distantiæ locorum à centro virium, tempora definire quibus corpora rectà deorsum cadendo spatia quævis data describant.

Si corpus non cadat perpendiculariter, describet id sectionem aliquam conicam, cujus *umbilicus inferior* (propter motus projectilis descensum hic suppositum) congruet cum centro virium, uti ex ante dictis constat. Sit sectio illa conica Ellipsis *ARPB*. ubi nimirum projectionis velocitas, est ad velocitatem qua corpus in circulo ad eandem distantiam revolvere posset, in minore ratione quam est radix quadratica numeri binarii ad unitatem. Sit hujus Ellipseos umbilicus inferior *S*. & super hujusce Ellipseos axe majore *AB* describatur semicirculus *ADB*. Et per corpus decidens transeat recta *DPC* perpendicularis ad axem, actisque ad umbilicum *DS* & *PS*; erit area *ASD*, areæ *ASP*, atque adeo tempori proportionalis. Est enim ut *CD*, ad *CP*, ita area trianguli *SCD*, ad aream trianguli *SCP*. Est etiam ex Conicis ut eadem *CD*, ad eandem *CP*, ita area circularis *CAD*, ad aream Ellipticam *CAP*. Et proinde, erit priorum arearum summa *ASD* ad summam posteriorum *ASP*, ut *CD*, ad *CP*; sive ut axis major Ellipseos, ad ejusdem axem minorem: atque adeo in ratione data, tempori proportionali. Manente jam Ellipseos axe majore, sive circuli diametro *AB*, minuatur perpetuo Ellipseos latitudo, sive axis minor; & semper, ex vi jam demonstratorum, manebit area *ASD* tempori proportionalis: minuatur latitudo illa in infinitum, & orbe *APB* elliptico jam coincidente cum axe *AB*: & umbi-

Prop. 21. *prius.* *Vid. Fig. p.* 148.

Coroll. 2. *Prop.* 22. *prius.*

VI. 1. *Elem.*

V. 12. *Elem.*

umbilico *S* cum axis termino *B*: deſcendet corpus in rectâ *AC*; & area *ABD* evadet hoc etiam in caſu tempori proportionalis. Unde ſi linea recta ut *CD* axi perpendicularis ita ſibi parallelos ſemper deorſum moveri ſupponatur, ut area *ABD* ſit ubique tempori proportionalis, punctum *C* locum determinabit, ad quem eodem tempore dato corpus deorſum in centrum cadens eſt perventurum.

Exempli gratia, Sit *AB* Lunæ à centro telluris diſtantia mediocris pedum, ut prius, circiter 1.257.696.000. Requiritur ut Lunæ rectâ deſcendentis locum die caſus primo exeunte determinemus. Notum eſt ex olim demonſtratis quòd ſi motus Lunæ ceſſaret, caderet illa ſpatio unius minuti primi pedes Anglicos 16⌊1 circiter. Unde erit area circularis *ABd* pedum quadratorum quaſi 89.483.812.704.000 [æqualis nimirum rectangulo *cd* in $\frac{1}{2}$ *AB* ducto.] Unde cum diei integro inſunt minuta prima 1440 erit area circularis *ABD* diei integro debita pedum quadratorum quaſi 128.856.690.293.760.000. Eſt vero tempus datum minuta prima 1440. Si itaque punctum *D* definire poſſimus, ita ut area *ABD* ſit pedum quadratorum 128.856.690.293.760.000 ſinus arcus *AD*, hoc eſt *DC*, lineam eo tempore deſcriptam *AC* determinabit, utpote ejuſdem arcus ſinum verſum. Area autem iſta æquatur rectangulis $\frac{1}{2}$ $CD \times OB$ & $\frac{1}{2}$ $AD \times OB$ ſive rectangulo $\frac{1}{2}$ $CD + \frac{1}{2}$ $AD \times OB$. Si itaque area data per ſemidiametrum *OB* dividatur, quotus exhibebit ipſarum *CD* & *AD* ſemiſſem. Ex ſinuum itaque tabula quærendus eſt arcus ille, cujus ſemiſſis ſemiſſi ſinus ſui ſuperadditus quotum iſtum eſt exhibiturus. Eſt vero ex calculo quotus iſte pedum 204.909.120, ſive ad circulum cujus radius eſt partium

Coroll. 7. poſt Prop. 2. prius.

Coroll. poſt Prop. 5. Selec. ex Archimed.

10.000.000. reducendo, eſt partium illarum 3.258.484. Et ſi apud ſinuum tabulas ſinum ad gradum undevigeſimum, & iſtius gradus ſcrupulum quinquageſimum exeuntem reſpiciamus, ſinus unius minuti primi per minuta 1130 multiplicatus 2909 X 1130, partes dabit 3.287.170, arcui nimirum *AD* graduum 18 & ſcrupulorum primorum 50 congruas; cujus arcus ſinus eſt partium 3.228.165, & utriuſque ſumma erit partium 6.515.335 cujus ſemiſſis 3.257.667. cum numero priore 3.258.484 ſatis accurate congruit. Eſt ergo linea *CD* ſinus graduum 18, & minutorum primorum 50, & linea eo temporis ſpatio deſcripta eſt iſtius arcus ſinus verſus longus nimirum partes 535.382, hoc eſt, reducendo ad ſemidiametrum orbitæ Lunaris, longus pedes 33.667.390, hoc eſt, milliaria Anglica 6.376 cum pedibus 2.110. Et eodem modo tempus definetur quo Luna ad ipſum telluris centrum eſſet deſcenſura. Sed quoniam illud ex alia computandi ratione eaque faciliori olim deduximus, calculo iſti impræſentiarum ſuperſedebimus.

Prop. 23. prius.

Corollarium. Si figura *RPB* non ſit Ellipſis, ſed Hyperbola, vel Parabola, res eodem modo per Hyperbolam rectangulam, vel parabolam quamvis conficietur; ſed ob praxin difficiliorem, & minus neceſſariam eandem mittemus.

Coroll. (2.) Tempora quibus corpora quævis in centrum ex diſtantiis diverſis caderent, ſunt inter ſe in ſeſquialtera diſtantiarum illarum ratione directe. Eſt enim lineola *Ac* dato tempore ad diſtantias diverſas genita in duplicata diſtantiæ ratione reciproce; unde erit *cd* ſinus quam minimus in ſubſeſquiplicata diſtantiæ ratione reciproce. & Area $\frac{1}{2}$ *cd* in *AB* ſimul deſcripta in ſubduplicata diſtantiæ ratione directe. Unde cum area integra ſemicircularis *ADB* ſit in duplicata ratione

one distantiæ directe, erit tempus eidem proportionale in ratione distantiæ sesquiplicata directe. *Q.E.D.*

Exempli gratia, Sit *AB* altera ipsius *AB* dupla; erit tum subtensa evanescens anguli contactus, sive lineola *Ac*, ipsius *Ac* pars tantum quarta. Et erit sinus *cd*, ipsius *cd* subsesquiplicata, sive ut latus quadrati ad diametrum; hoc est, ut 7 ad 10 fere. Erit quoque area $\frac{1}{2}$ *cd* × *AB* ad $\frac{1}{2}$ *cd* × *AB*, fere ut 2 × 7 = 14 ad 1 × 10 = 10. Unde area in majori distantia descripta erit ad aream in minori, sed eodem tempore descriptam fere, ut 14 ad 10; vel ut diameter in quadrato ad latus. At integra area à majori linea *BD* in descensu describenda, est ad aream à minori linea *BD* in descensu describendam, ut 4 ad 1; sive ut 40 ad 10. Ergo erit tempus descensus in majori distantia, ad tempus descensus in minori, in ratione excessus rationis 40 ad 10 supra rationem 14 ad 10: Sed ista excessus ratio est ut 40 ad 14, sive ut diameter quadrati ad lateris quadruplum. Unde tempora sunt inter se ut diameter quadrati ad lateris quadruplum, hoc est, in sesquialtera distantiarum ratione directe. *Q.E.D.*

Prop. 2. Coroll. 4. supra.

Coroll. (3.) Si itaque Planetarum primariorum, quin & Circumjovialium & Circumsaturniorum quemvis in centrum orbitæ cadentem supponamus, & horum tempora descensus semel definita habeamus, facile fuerit ex notis reliquorum distantiis eorum etiam descensus tempora definire; quod ex alio fundamento prius præstitimus: Neque proinde actum jam hic loci agemus.

Coroll. (4.) Cum itaque velocitas in Ellipsi in mediocri ab umbilico distantia, hoc est, velocitas cadentis ad centrum *O* Ellipseos in rectam desinentis, sit æqualis velocitati æquabili corporis in circulo, cujus radius est *BO*, gyrantis, liquet velocitatem cadentis in ipso spatii medio *O* esse æqualem velocitati gyrantis in circulo ad eandem distantiam. Unde quoque sequitur velocitatem cadentis in distantia remotiori esse velocitate circulari

culari minorem, & in distantia propinquiori majorem.

XXV. *Problema.* Posito quod vis centripeta sit proportionalis altitudini, seu distantiæ locorum à centro directe, tempora definire quibus corpora rectà cadendo spatia quævis data describant.

Si corpus non cadat perpendiculariter, describet id sectionem aliquam conicam, cujus *centrum* congruet cum virium centro; uti ex ante dictis constat. Sit sectio illa conica Ellipsis *ARPB*. Ejus centrum *O*. & super hujus Ellipseos axe majore *AB* describatur semicirculus *ABND*. & per corpus decidens transeat recta *DPC* perpendicularis ad axem: actisque ad centrum *DO* & *PO*, erit ex Conicis Area *AOD* Areæ *AOP*, atque adeo tempori proportionalis. Est enī ut prius ut *CD*, ad *CP*, ita area trianguli *OCD*, ad aream trianguli *OCP*. Et etiam ex Conicis ut eadem *CD*, ad eandem *CP*, ita area circularis *CAD*, ad aream Ellipticam *CAP*. Et proinde, erit arearum priorum summa *AOD*, ad summam posteriorū *AOP*, ut *CD* ad *CP*: sive ex Conicis ut axis ma-

Prop. 19. prius.

Prop. 15. prius.

VI. 1. *Elem.*

V. 12. *Elem.*

jor

jor Ellipſeos ad ejuſdem axem minorem: atque adeo in ratione data, tempori proportionali. Manente jam Ellipſeos axe majore, ſive circuli diametro *A F*, minuatur perpetuo Ellipſeos latitudo, ſive axis minor. Et ex vi jam demonſtratorum manebit area *A O D* tempori proportionalis. Minuatur latitudo illa in infinitum; & Orbe *A R P B* elliptico jam coincidente cum axe *A B*, deſcendet corpus in recta *A C*. & area *A O D* evadet hoc etiam in caſu tempori proportionalis. Unde ſi linea recta ut *C D* axi perpendicularis ita ſibi parallelos ſemper deorſum moveri ſupponatur, ut *A O D* ſit ubique tempori proportionalis, punctum *C* locum determinabit ad quem eodem tempore dato corpus deorſum cadendo eſt perventurum.

Corollarium. Propter æqualitatem areæ circularis æquali tempore ubique deſcribendæ circa circuli centrum, erit motus puncti *D* ſemper æquabilis, & arcus æquales dato tempore deſcribet.

Coroll. (2.) Tempora itaque corporum cadentium, & ſpatia quæcunque deſcribentium, ut *A C*, ſunt inter ſe ut ipſi arcus *A D*. Et ſpatia deſcripta ut arcuum ſinus verſi, *A C*.

Coroll. (3.) Velocitates autem in locis quibuſvis ut *C*; genitæ, ſunt ut arcuum *A D* ſinus recti. Ducatur enim linea *c d* ipſi *C D* parallela, in diſtantia nempe infinite parva; & ducatur circuli tangens *d D*. Dum itaque punctum *D* deſcribit tangentem *d D*, corpus cadens deſcribit lineolam *c C* ipſi *d e* æqualem; & ob datam puncti *D* velocitatem, dato tempore dabitur etiam *d D* longitudine. Erit ergo in triangulo *d e D* *d D* radius circuli datus, & *d e* anguli *d D e* ſinus rectus. Et propter ſimilitudinem triangulorum *d e D* *C O D*, erit eo loci radius *O D*, & ſinus rectus anguli *A O D* ipſa *C D*. Eſt ergo velocitas in punctis quibuſvis *C* ut arcus *A D* ſinus rectus. *Q. E. D.*

Coroll. (4.) Tempora omnia quibus corpora de locis quibuſvis ad uſque centrum cadunt ſunt ubique æqualia. Cum

Cum enim ex Hypothesi vis acceleratrix, atque adeo velocitas genita, sit ut linea describenda, palam est tempora descensus esse ubique æqualia. *Q.E.D.*

Coroll. (5.) Cum ex olim demonstratis corporum omnium circa Ellipseon centrum gyrantium tempora periodica sint æqualia, erunt & temporum periodicorum quadrantes per *ARPV* æquales. Et cum hoc in Ellipsibus quibuscunque verum sit, etiam & in Ellipsium hinc inde extremis, hoc est, in linea recta *AO* & arcu quadrantali *AN* verum erit. Hoc est, æqualia erunt tempora quibus corpus unum de loco quocunque *A* cadendo pervenit ad centrum *O*, & corpus aliud revolvendo describit arcum quadrantalem. *Q.E.D.*

Coroll. 3. *Prop.* 19. *supra.*

Scholium (1.) Cum itaque tempus periodicum Lunæ circa terram, sit ad tempus periodicum corporis cujusvis circa centrum telluris revolvens ad semidiametri terrestris distantiam, in sesquialtera distantiarum ratione; & cum intra superficiem telluris vis centripeta sit ubique in directa distantiæ ratione, uti olim demonstrabitur; juvabit superioris ratiocinii exemplum in medium proferre; & quo temporis spatio gravia, posito ad centrum puteo vel foramine vacuo, illuc descenderent calculo ostendere. Ut ergo temporis periodici in telluris superficie quadrantem, quo nimirum corpora omnia ad centrum accederent, juxta jam demonstrata investigemus, fiat ut distantiæ Lunaris cubus, 60 × 60 × 60. = 216.000. ad semidiametri terrestris cubum, 1 × 1 × 1. = 1. ita periodi Lunaris quadratum 39.343′. × 39.343′. = 1.547.871.649. ad periodi in superficie terrestri quadratum = 7.166|07. cujus radix quadratica 84|6 exhibebit scrupulos primos horarios quibus corpus vel Planeta ad semidiametri terrestris distantiam à centro circa illud integram periodum absolveret. Cujus numeri quadrans 21|15 exhibebit temporis spatium

Schol. post Prop. 14. *prius.*

scru-

ſcrupulis itidem primis deſignatum, quo gravia quæcunque per ſemidiametrum terreſtrem ad ejuſdem centrum pervenirent. Et cum in diſtantiis quibuſcunque idem ſit caſûs tempus, uti jam oſtenſum, liquet corpora omnia ſcrupulis primis viginti & uno, cum partibus ſcrupuli centeſimis quindecim, ſive ſcrupulis ſecundis novem, à ſuperficie ad centrum eſſe deſcenſura. *Coroll. 4. prius.*

Schol. (2.) Sin tempus caſûs per ſpatium quodlibet datum abſque Algebræ uſu requiratur; ſcilicet per ſemidiametri terreſtris trientem; quære apud ſinuum Tabulas, ad quem angulum ſinus verſus eſt ſinus totius pars tertia; nimirum ad arcum *AD* graduum 41°. 25′. Unde tempus caſus per *AC*, ſemidiametri trientem, erit ad tempus caſus integri ad centrum, ut Arcus *AD*, ad arcum quadrantalem *AN*: ſive ut 41°. 25′. ad 90°. Et cum 90° : 41°. 25′. : : 21,15 ſcrupuli primi horarii : 9,97, ſive 9′ : 58″. liquet corpus quodvis per ſemidiametri terreſtris trientem ſcrupulis primis horariis novem, & ſecundis quinquaginta octo eſſe deſcenſurum. Et velocitatem in puncto *C*, eſſe ad velocitatem maximam, ubi ad ipſum centrum deſcenderet, in ratione ſinus Recti *CD*, ad ſinum totum *ON*: ſive ut 66.153 ad 100.000. uti ex nuperrime demonſtratis eſt apertiſſimum. *Vid. Fig. p. 154.* *Coroll. 2. prius.* *Coroll. 3. prius.*

April 7. 1705.

XVII.

XXVI. PROBLEMA. Corpore in data trajectoria parabolica circa focum delato, dati arcus deſcripti, aut deſcribendi, ſive in aſcenſu ſive in deſcenſu, invenire tempus. Sit *F* exempli gratia Umbilicus figuræ. *T* vertex principalis. *Tl* vel *Tı* arcus datus deſcriptus, aut deſcribendus. *Tt* vel *Tq* ejuſdem arcus abſciſſa, ex dato arcu etiam data.

tl

tl vel *qs* semiordinata, ex arcu dato etiam data. Requiritur tempus arcus istius *Tl* vel *Ts* descripti, aut describendi. Ex data Parabola datur ejusdem Latus rectum, ejusque proinde pars quarta *TF*. Ex data quoque corporis centralis vi centripeta, datur corporis in vertice principali velocitas; quæ nempe est ad velocitatem corporis circulum, cujus radius est *TF*, describentis ut radix quadratica numeri binarii ad unitatem. Unde quoque dabitur & area minima à radio *TF* dato quovis tempore minimo describenda. Est autem area *FTl* vel *FTs* æqualis duabus tertiis rectanguli $Tt \times tl$, vel $Tq \times qs$. Cui si *addatur* triangulum *Ftl* in priore casu, & in posteriore ab eodem *aufratur* triangulum *Fqs*, dabitur & area *Ftl* vel *Fts*: quæ per aream minimam dato quovis tempore minimo in vertice *T* descriptam divisa, dabit tempus quæsitum. *Q. E. I.*

Prop. 22. prius.

Exempli gratia, sit Parabola data illa quam Cometa exeunte Anno 1680. & ineunte 1681. per Europam visus descripsit. Sit *Fq* orbis magni semidiametro æqualis, partium nempe æqualium 10.000, qualium partium sit latus rectum 236|8. Et proinde *FT* partium 59|2, & integra abscissa *Tq* partium 10.059|2. Ponamus etiam Cometam fuisse in Parabolæ vertice, sive perihelio suo *T* Decembris 8°, scrupulo quarto post meridiem. Ad velocitatem Cometæ in vertice Parabolæ inveniendam, reperiatur primum Planetæ ad istam distantiam in circulo revolventis velocitas; nempe ex hac analogia: ut radix quadratica distantiæ *FT*, partium 59|2 = 7|7. ad radicem quadraticam distantiæ *Fq*. partium 10.000 = 100. ita velocitas Telluris annua, ad velocitatem Planetæ circulum cujus radius est *FT* describentis. Deinde, ut radix quadratica numeri binarii = 1|414, ad unitatem, ita erit velocitas Cometæ in vertice parabolæ suæ, ad velocitatem Planetæ in circulo ad eandem distantiam.

Vid. Newt. p. 494. & 498.

Prop. 13. prius.

am. Eſt autem velocitas Telluris mediocris hujuſmodi quæ ſpatio minuti unius primi deſcribat partes L1195. & 7L7 : 100 : : L1195 : 1L552. Unde velocitas Cometæ in perihelio ſuo ea erit quæ ſpatio unius minuti primi deſcribat partes $\frac{1L414}{1}$ 1L552 = 2L19. qualium ſemidiameter orbis magni eſt 10.000, & qualium diſtantia Cometæ minima eſt 59L2. Area itaque dato illo tempore à Cometa radio ad centrum Solis ducto deſcripta æqualis eſt rectangulo $\frac{1}{2}$ 59L2 × 2L19 = 64L824. partibus quadratis. Ut itaque jam tandem temporis ſpatium arcum parabolicum ut *Ts*, ubi *Fq* eſt magni orbis ſemidiametro æqualis deſcribendi inveſtigemus, aream *TsF* computabimus, & cum area priore unico minuto primo deſcripta conferemus. Itaque, ut *TF* partium 59L2, ad *Tq* partium 10.059L2. ita ſit quadratum *Fh* partium 118L4 = 14.018L56, ad partes quadratas 2.382.018L61. cujus numeri radix quadratica = 1.543L3. ex Conicis æqualis erit ſemiordinatæ *qs*: qua in dimidiam diſtantiam *Fq* ducta 1.543L3 × $\frac{1}{2}$ 10.000 = 7.716.500 emerget trianguli addititii *Fqs* area. Eſt autem area parabolica integra *Tsq* æqualis duabus tertiis rectanguli *Tq* partium 10.059L2, in *sq* partium 1.543L3 ducti, ſive partibus quadratis $\frac{2}{3}$ 15.524.363L36 = 10.349.575L57. E quo numero deducatur triangulum *Fsq*. 7.716.500 relinquetur area deſcripta partium quadratarum 2.633.075L57. quibus per partes areæ uni minuto primo debitas diviſis $\frac{2.633.075L57}{64L824}$ prodit temporis ſpatium quæſitum: quo nempe Cometa arcum *Ts* deſcriberet = 4.061L9 = 28°. 4h. 59′. Unde arcus *Ts* deſcribetur diebus viginti octo, & horis prope quinque. Et Cometa punctum *s* occupa-

occupabat Januarii quinto, hora circiter post meridiem quarta. Quod etiam cum schemate Newtoniano ex observationibus deducto exacte congruit.

Si itaque ex hujusmodi calculis cujusvis Cometæ Parabolam, aut potius Ellipsin adeo eccentricam, ut pro Parabola tuto haberi possit, describentis arcubus quibusvis, ut Ts, tempora congrua semel determinata haberemus, ex inversa methodo etiam temporibus quibusvis arcus congruos satis accurate definire possemus: eadem nempe operandi ratione qua in Hypothesi Kepleriana ejusque tabulis ex data anomalia Planetarum media in Ellipsibus, eorundem coæquatam invenire solemus.

Coroll. (1.) Cum itaque evanescat triangulum ablatitium Fsq in puncto h, erit tum temporis area computanda æqualis duabus tertiis rectanguli TF in Fh; sive $\frac{2}{3}\, 59\llcorner 2 \times 118\llcorner 4 = 4.676\llcorner 8$. & proinde tempus huic areæ debitum æquale $\frac{4.676\llcorner 8}{64\llcorner 824} = 1^{h}.\ 12'.\ 9''$. Unde arcus Th inter verticem principalem parabolæ, & axi ordinatam per focum describebatur hora una, scrupulis primis duodecim, & secundis novem. Et Cometa punctum s occupabat Decembris octavo, scrupulo primo decimo septimo post horam primam pomeridianam.

Coroll. (2.) Hinc etiam temporis spatium quo arcus quivis datus describitur facile innotescit: computando nimirum tempus à perihelio ad locum utrumque, & tempus brevius à longiori auferendo. Eo enim pacto innotescet intervallum temporis arcui dato debitum. Sic sane deducto tempore arcui Th congruo $= 1^{h}.\ 10'.\ 9''$. ex tempore arcui Ts congruo $= 28^{d}.4^{h}.\ 59'$. reliquum est temporis intervallum arcui hs congruum. $= 28^{d}.\ 3^{h}.46'.\ 51''$. Atque ita ubique.

Coroll. (3.) Hinc etiam methodus ex tempore dato arcum descriptum inveniendi peti potest. Cum enim ad punctum h evanescat semper triangulum ablatitium Fqs, aut addititium Ftl; & area proinde eo loci facillime computetur, partium nempe quadratarum in nostro

exemplo 4.677L0.516. Cum etiam eo loci TF sit ipsius Fh semissis; cum demum abscissa TF eadem semper ratione crescat, quo crescit ipsius ordinatæ Fh quadratum; dato quovis tempore, sive area ipsi proportionali, dabitur arcus eidem congruus: si incrementorum vel decrementorum proportionalium ea quantitas sumatur ut $\frac{1}{2}$ $qs \times Fq$, ex $\frac{4}{3}$ $qs \times Tq$ ablata reliqua sit quantitas areæ datæ. Sic sane, Ut arcum 28^d. 14^h. 59'. = 40.619'. hoc est, areæ partium quadratarum 2.633.075L57 congruum inveniam, Quæro per tabulas quadratorum numerorum, si absque Algebræ auxilio agendum, Ubi talis occurrit numerus sumpta linea TF tanquam unitate: & Area FTh tanquam primaria, vel unitate quadrata: vel $\frac{2}{3}$ $TF \times Fh$ = 563. parte areæ totius: & Fh tanquam numero binario:) Ut numeris unitati addendis proportionalibus existentibus, numerorum binario addendorum quadratis $\frac{1}{2}$ $qs \times qF$ de $\frac{4}{3}$ $qs \times Tq$ ablato, reliqua sit area data = 563. Qui numerus alibi non occurret nisi eo loci ubi Fq, est ad FT, ut 10.000 ad 59L2. Sive ut 167 ad 1 fere. Unde liquet arcum quæsitum eum ipsum esse cujus Tq partium 10.059L2 est abscissa. Sed cum hæc methodus non nisi tentando fiat, directa non est. Satis tamen est quæ tabularum condendarum originem & methodum aliquatenus indicare possit.

Scholium. Notandum est, methodum Newtoni Geometricam ex dato tempore arcū descriptum directe indicare. Si nimirum fiat ut tempus ThF tempus areæ congruum, ad tempus datum, ita FT ad ty: puncto t mediam lineam TF occupante, & ty ad TF perpendiculari ducta, Erit distantia à foco yF æqualis ys. Unde circulus isto radio descriptus punctum designabit. Sed cum calculo methodus ista minus sit idonea, eandem missam impræsentiarum faciemus.

Vid. Newt. L. I. Prop. 30.

Scholium. Hactenus exposuimus præcipue motus corporum attractorum ad centrum immobile, quale tamen

men vix extat in rerum natura. Attractiones autem fieri solent ad corpora: & corporum trahentium & attractorum actiones semper mutuæ sunt, & æquales, uti olim ostendimus; adeo ut neque attrahens possit quiescere, neque attractum, si duo sint corpora; sed ambo quasi attractione mutua, ubi motus projectilis utriusque more debito utrique semel est impressus, circum gravitatis centrum commune revolvantur. Et si plura sint corpora, (quæ vel ab unico attrahantur, vel omnia se mutuo attrahant,) hæc ita inter se moveri debeant ut gravitatis centrum commune vel quiescat, vel uniformiter moveatur in directum, ut olim quoque ostendimus. Qua de causa jam pergimus motum exponere corporum se mutuo trahentium: considerando vires centripetas tanquam Attractiones, quamvis fortasse, si physice loquamur, verius dicantur Impulsus. In mathematicis enim jam versamur; & propterea, missis disputationibus physicis, familiari utimur sermone, quo possimus à Matheseos studiosis facilius intelligi.

Lex Motus 5. prius.

Lex Motus 25. prius.

XXVII. Corpora duo se invicem trahentia describunt & circum commune centrum gravitatis, & circum se mutuo figuras similes: hoc est, describendo revera figuras similes circa commune gravitatis centrum; oculo in alterutro duorum posito, & motum corporis sui vel centri gravitatis non percipiente, figura iisdem similis describi videbitur.

Sunt enim distantiæ à communi gravitatis centro corporibus reciproce proportionales, atque adeo in data ratione ad invicem: & componendo in data ratione ad distantiam totam inter corpora. Feruntur autem hæ distantiæ circum terminos suos communi motu angulari, propterea quod in directum semper jacentes non mutant inclinationem ad se mutuo. Lineæ autem rectæ quæ sunt in data ratione ad invicem, & æquali motu angulari circum terminos suos feruntur, figuras circa eos

[illegible]

[illegible] vel [illegible]) [illegible] *Q.E.D.*

[illegible] fedis [illegible] invisibilis [illegible]: [illegible] acci- [illegible]

[illegible] se mu- [illegible] gravitatis cen- [illegible] descri- [illegible] & æqualis [illegible] de- [illegible]

[illegible] gravitatis centrum *C*, [illegible] *Q*. *A* dato [illegible] *SP*. *TQ* æquales & parallelæ ducantur semper *sp*. *sq*. & curva *pqv*, quam punctum *p* revolvendo circum punctum immotum *s* describit, erit similis & æqualis curvis quas corpora *S*. *P* describunt circum se mutuo: proindeq; per Propositionem postremam similis curvis *ST* & *PQV* quas eadem corpora describunt circa commune gravitatis centrum *C*. id adeo quia proportiones linearum *SC*. *CP*. & *SP*. vel *sp* ad invicem ubique dantur.

CASUS

Casus (1.) Commune illud gravitatis centrum *C*, per motus legem 25. vel quiescit, vel movetur uniformiter in directum. Ponamus primo, quod id quiescit: inque *s* & *p* locentur corpora duo: immobile in *s*; & mobile in *p*: corporibus *S* & *P* respective similia & æqualia. Dein tangant rectæ *PR.* & *pr.* curvas *PQ.* & *pq.* in *P.* & *p.* & producantur *CQ.* & *sq.* ad *R.* & *r.* Et ob similitudinem figurarum *CPRQ. sprq.* erit *RQ*, ad *rq*, ut *CP*, ad *sp*: adeoque in data ratione. Proinde, si vis, qua corpus *P* versus corpus *S*, atque adeo versus centrum intermedium *C*, attrahitur, esset ad vim qua corpus *p* versus centrum *s* attrahitur in eadem illa ratione data, hæ vires æqualibus temporibus attraherent semper corpora de tangentibus *PR. pr.* ad arcus *PQ. pq.* per intervalla ipsis viribus proportionalia *RQ. rq.* adeoque vis posterior efficeret ut corpus *p* gyraretur in curva *pqv*, quæ similis esset curvæ *PQV*, in qua vis prior efficit ut corpus *P* gyretur: & revolutiones iisdem temporibus complerentur. At quoniam vires illæ non sunt ad invicem in ratione *CP* ad *sp*, sed (ob similitudinem & æqualitatem corporum *S* & *s. P* & *p.* & æqualitatem distantiarum *SP. sp.*) sibi mutuo æquales, corpora æqualibus temporibus æqualiter trahentur de tangentibus; & propterea ut corpus posterius *p* trahatur per intervallum majus *rq.* requiritur tempus majus, idque in subduplicata ratione intervallorum; propterea quod spatia ipso motus initio descripta sunt in duplicata ratione temporum. Ponatur igitur velocitas corporis *p*, esse ad velocitatem corporis *P*, in subduplicata ratione distantiæ *sp* ad distantiam *CP.* eo ut temporibus quæ sint in eadem subduplicata ratione describantur arcus *PQ. pq.* qui sunt in ratione integra, sive inter se similes. Et corpora *P. p*, viribus æqualibus semper attracta describent circum centra quiescentia *C* & *s* figuras similes *PQV*, *pqv*, quarum posterior

Prop. 4. prius.

pqv ſimilis eſt & æqualis figuræ quam corpus P circum corpus mobile S deſcribit. *Q. E. D.*

CASUS (2.) Ponamus jam quod commune gravitatis centrum, una cum ſpatio relativo in quo corpora moventur inter ſe, progreditur uniformiter in directum: & per motus legem 26. omnes motus in hoc ſpatio peragentur ut prius: adeoque corpora deſcribent circum ſe mutuo figuras eaſdem ac prius: eaſque propterea ipſi figuræ pqv ſimiles & æquales. *Q. E. D.*

Coroll. (1.) Tempus periodicum circa corpus immobile s, erit tempore periodico circa mobile S, vel verius circa gravitatis centrum C, majus: idque in reciproca ratione angulorum ſimul deſcriptorum: hoc eſt, in ſubduplicata ratione radiorum sp & CP. hoc eſt, in ſubduplicata ratione ſummæ corporum $S + P$ ad corpus S. Sic ſi Luna p circa Tellurem immobilem s revolveretur ad eandem diſtantiam; & ſi quantitas materiæ in Luna poneretur tantum pars vigeſima ſexta quantitatis materiæ in terra; Tempus periodicum Lunæ majus eſſet tempore ejuſdem periodico præſenti, in ratione numeri 27. ad numerum 26,495. Sunt enim 27: 26,495: $26\frac{..}{..}$. Unde cum Tempus periodicum Lunæ ſit jam $27^d. 7^h. 43'$. ſive $39.343'$. Si circa Terram immobilem revolveret, Tempus periodicum eſſet $40.092'$. ſive $27^d. 20^h. 12'$.

Coroll. (2.) Hinc corpora duo viribus diſtantiis ſuis directe proportionalibus ſe mutuo trahentia, deſcribunt & circum commune gravitatis centrum, & circum ſe mutuo Ellipſes concentricas, & centra in virium centris habentes. Et vice verſa; ſi tales figuræ circa Ellipſeωn centra deſcribantur, ſunt vires centripetæ diſtantiis à centro directe proportionales.

Vid. Prop. 19. prius.

Coroll. (3.) Corpora duo viribus quadrato diſtantiæ ſuæ reciproce proportionalibus deſcribunt, & circum commune gravitatis centrum, & circum ſe mutuo Sectiones Conicas, umbilicos

Vid. Prop. 21. prius.

eos habentes in centro circum quod figuræ describuntur. Et vice versa, si Tales figuræ circa Sectionum Conicarum focum describantur, vires centripetæ sunt distantiarum quadratis reciproce proportionales.

Coroll. (4.) Corpora duo quævis circum gravitatis centrum commune gyrantia radiis & ad centrum illud, & ad se mutuo ductis describunt areas temporibus proportionales; nimirum propter radiorum vel virium centripetarum ad ista centra perpetuam directionem.

Vid. Prop. 15, prius.

Maij 14°. 1705.

XVIII.

XXIX. SI corpora duo *S* & *P* viribus quadrato distantiæ suæ reciproce proportionalibus se mutuo trahentia revolvantur circa gravitatis centrum commune; Ellipseos quam corpus alterutrum *P* hoc motu circa alterum *S* describit Axis Transversus, erit ad Axem transversum Ellipseos quam corpus idem *P* circa alterum quiescens eodem tempore periodico describere posset, ut summa corporum duorum *S* + *P*, ad primam duarum medie proportionalium inter hanc summam & corpus illud alterum *S*. Nam si descriptæ Ellipses essent sibi invicem æquales, tempora periodica per Propositionem postremam forent in subduplicata ratione corporis *S* ad summam Corporum *S* + *P*. Minuatur in hac ratione tempus periodicum in Ellipsi posteriore, & tempora periodica evadent æqualia. Ellipseos autem axis transversus † minuetur in ratione cujus hæc subduplicata est sesquiplicata; id est in rati-

Vid. Fig. p. 164.

Prop. 13. supra.

one cujus ratio integra S ad $S + P$ est triplicata: adeoque ad axem transversum Ellipseos alterius ut prima duarum medie proportionalium inter $S + P$, & S, ad $S + P$. Et inverse Axis transversus Ellipseos circa corpus mobile descriptæ, erit ad axem transversum descriptæ circa immobile, ut $S + P$, ad primam duarum medie proportionalium inter $S + P$, & S. *Q.E.D.*

Sic si distantia Lunæ à Terra mediocris: hoc est, axis transversi Ellipseos descriptæ semissis ex hypothesi Terræ immobilis sit 60. semidiametrorum terrestrium, dato nempe tempore periodico; erit ex hypothesi Terræ & Lunæ circum gravitatis centrum commune gyrantium distantia illa 60 semidiametris major, eaque in ratione summæ Terræ atque Lunæ, ad primam duarum medie proportionalium inter Terræ Lunæque summam & Terram. Sive ex Hypothesi quod Luna sit 26ª. pars terræ; ut 27. ad 26l665. Sunt enim 26 : 26l333 : 26l665 : 27 $\frac{\cdot}{\cdot}$. Unde cum distantia Lunæ in Hypothesi terræ immobilis ponatur 60 semidiametrorum terrestrium, erit revera ex ejusdem motu $60\frac{2}{4}$ semidiam.

Corollarium. Ex nuperrime demonstratis sequitur, quod si Corpora duo viribus quibusvis se mutuo trahentia, neque alias agitata vel impedita quomodocunque moveantur, Motus eorum perinde se habebunt, ac si non traherent se mutuo, sed utrumque à corpore tertio in communi gravitatis centro constituto viribus iisdem traherentur. Et virium attrahentium eadem erit Lex respectu distantiæ corporum à centro illo communi atque respectu distantiæ totius inter corpora. Vires enim illæ quibus corpora se mutuo trahunt, tendendo ad corpora, tendunt ad commune gravitatis centrum intermedium: & distantiæ à centro gravitatis sunt distantiis corporum ubique proportionales: adeoque vires eædem sunt & eadem ratione crescunt vel decrescunt, ac si à corpore intermedio in gravitatis centro manarent.

XXX. Corpora plura, quorum vires materiæ quantitati sunt proportionales, & in directa distantiarum ratione,

tione,

tione, moveri possunt in variis Ellipsibus circa earum centra: ita ut motus sine perturbatione perpetuo perseverent, & ut commune omnium gravitatis centrum interea quiescat.

Ponantur imprimis corpora duo *T* & *L* commune habentia gravitatis centrum *D*. Si motus projectilis debita proportione secundum lineas parallelas in eodem plano sitas, sed secundum directiones contrarias utrique semel imprimatur, describent hæc Ellipses similes, centra habentes in *D* communi duorum gravitatis centro, ut olim exposuimus. *Prop. 19. prius.*

Trahat jam corpus tertium *S* priora duo *T* & *L*,

viribus acceleratricibus *ST*, *SL*. & ab ipsis vicissim trahatur. Vis *ST* per legem motus 22. resolvi potest in vires *SD*, *DT*. & vis *SL* in vires *SD*, *DL*. Vires autem *DT*, *DL*, quæ sunt ut ipsarum summa *TL*: [cum enim rationes ipsarum partium *TD* & *DL* eædem semper maneant, manebit & ratio totius

TL

TL in omnibus corporum *T* & *L* diſtantiis.] Et vires acceleratrices ipſorum corporum *T* & *L* ſunt ut diſtantiæ *TL*. & vires adjectitiæ à corpore *S* oriundæ, & ſecundum lineam *TL* tendentes ſunt, ſicut jam vidimus, ut eædem diſtantiæ *TL*. Ergo ſumma virium *TD* & *LD* centrum gravitatis reſpicientes ſunt ut diſtantiæ *DT* & *TL*. Sed viribus prioribus majores: adeoque efficient ut corpora illa deſcribant Ellipſes, aut prioribus ſimiles motu celeriore, ſi motus projectilis pro vis centripetæ adjectitiæ ratione acceleretur; aut alterius ſpeciei ſi motus iſte projectilis maneat datus. Vires reliquæ acceleratrices *SD* & *SD* trahendo illa corpora æqualiter & ſecundum lineas *TI*, *LK* ipſi *DS* parallelas nil mutant ſitus earum ad invicem, ſed faciunt ut ipſa æqualiter accedant ad lineam *IK*, ipſi *SD* perpendicularem. Impedietur autem iſte ad lineam *IK* acceſſus faciendo ut Syſtema corporum *T* & *L*; hoc eſt, centrum gravitatis duorum *D* ex una parte; & Corpus *S* ex altera juſtis cum velocitatibus in dato plano ſecundum lineas parallelas gyrentur circa commune gravitatis centrum trium *C*. Tali motu corpus *S* (eo quod ſummæ motuum utrinque diſtantiæ *SD*, & proinde ipſis *CD* & *CS* directe proportionales trahunt corpora verſus centrum *C*:) deſcribet Ellipſin circa idem *C*. & punctum *D* deſcribet Ellipſin conſimilem è regione; interea dum Corpora *T* & *L* pergant Ellipſes ſuas circa centrum mobile *D*, ut prius deſcribere.

Addatur jam corpus quartum *V*. & ſimili argumento concludetur, hoc & punctum *C* Ellipſes circa omnium commune centrum gravitatis *B* deſcribere poſſe; manentibus motibus priorum corporum *T*, *L*, & *S*, circa centra *D* & *C*, ſed aliquantum acceleratis. Et eadem erit plurium ratio.

Caroll. (1.) Caſus Syſtematis corporum circa alia corpora revolventium, ubi vires centripetæ ſunt directe ut diſtantiæ, Ellipſes exhibet nobis accuratas; nec ullo

modo

modo per plurium corporum additionem perturbatas. Quo autem magis recedit Lex virium centripetarum ab hac lege, necesse est, cæteris paribus, ut eo magis corpora motus mutuos perturbent.

Coroll. (2.) Sin vires centripetæ sint reciproce ut distantiarum quadrata, & Systema corporum duorum pluriumve minorum circa commune gravitatis centrum in Ellipseos umbilico positum revolventium ad latus urgeatur à Corpore longe maximo, & satis remoto; ita ut commune omnium gravitatis centrum à centro corporis maximi non longe absit; commune Systematis corporum minorum gravitatis centrum Ellipsin circa corpus maximum, seu potius circa commune omnium gravitatis centrum describet. In motibus autem corporum minorum Inæqualitates haud paucæ orientur; quas in sequentibus explicabimus. Quales etiam in Luna nostra Astronomi observatis indubiis monstrarunt.

Coroll. (3.) Maxima autem omnium orietur in Systemate minore perturbatio, si corpus maximum omnes Systematis istius partes paribus distantiis inæqualiter attraheret: hoc est, si corporum variorum genera variis gradibus in Corpus maximum gravitarent; præsertim si proportionis hujus inæqualitas major esset quam inæqualitas proportionis distantiarum à corpore maximo. Nam si vis acceleratrix æqualiter & secundum lineas parallelas agendo nil perturbet motus corporum inter se, necesse est ut ex actionis inæqualitate perturbatio oriatur; majorque sit vel minor pro majore vel minore inæqualitate. Excessus impulsuum majorum agendo in aliqua corpora, & non agendo in alia; aut saltem in alia agendo minus, necessario mutabunt situm eorum inter se. Et hæc perturbatio, si qua esset, addita perturbationi quæ ex linearum inclinatione & inæqualitate necessario oritur, majorem redderet perturbationem totam.

Coroll. (4.) Unde si Systematis minoris partes in Ellipsibus circa focum, vel in Circulis circa centrum sine alia motuum perturbatione quam quæ ex linearum à

Cor-

Corpore maximo ductarum inclinatione & inæqualitate oriri debeat, moveantur, manifestum est quod vires acceleratrices omnium Systematis partium versus maximum sunt paribus distantiis æquales; & quod omnia corpora in Systemate minore comprehensa æqualiter in corpus maximum gravitant.

Coroll. (5.) Hinc etiam constat partes Systematis minoris aut à nullis aliis viribus acceleratricibus quam quæ ad corpus maximum tendunt, urgeri, nisi forte levissime & insensibiliter: aut saltem æqualiter, & secundum lineas parallelas urgeri quam proxime. Quæ omnia ad Systemata Terræ, & Lunæ; Jovis & Circumjovialium; Saturni & Circumsaturniorum, circa Solem gyrantia facile fuerit applicare: ut verbis pluribus haud opus esse videatur.

XXXI. Si Planeta primarius circa Solem revolvens secum deferat Satellitem, hic circa primarium ita movebitur ut à quadratura cum Sole ad conjunctionem aut oppositionem proxime insequentem acceleretur perpetuo; à syzygia vero ad quadraturam retardetur; adeoque prope syzygias Satelles velocius feretur, prope quadraturas vero tardius.

Sit *Q* Sol, *S* Planeta primarius in orbe suo annuo *ESE* revolvens. *P* vel *p* Satelles orbitam suam menstruam *ADBC* circa primarium describens: in qua orbita puncta *A* & *B* Syzygias cum Sole, hoc est, Conjunctionem & Oppositionem designent: *C* & *D* Quadraturas, hoc est, puncta per quadrantem circuli à syzygiis hinc inde distantia. Si porro *QS*, vel *QK*, vel *Qk*, mediocris distantia Satellitis à Sole, exponat attractionis acceleratricis quantitatem; qua nempe secundarius Planeta ad Solem tendit, ubi ad eandem atque primarius distantiam à Sole sit positus: Et locus Satellitis hujusce supponatur in *P* vel *p* in sua orbita: Sumatur in linea *PQ* vel *pQ*, si opus est, producta, *QL* vel *Ql*, quæ sit at *QK*, vel *Qk* in duplicata ratione *QK*, vel *Qk* ad *QP*, vel *Qp*, hoc est, ut sint

M
B
L
p
R
E C K S k D E
P
r
A
l
m
f
Q
F

fint $PQ : QK : QR : QL$. vel $Qp : Qk : Qr : Ql$ continue proportionales, hæc ultimo reperta linea QL, vel Ql exponet attractionem acceleratricem Satellitis ad L vel l positi versus Solem in Q. Jungatur SP. vel Sp; & huic parallela ducatur LM vel lm, cum QS in M vel m concurrens. Per motus legem 22. Attractio acceleratrix QL vel Ql resolvetur in attractiones LM, & LF, sive MQ: vel in lm, & lf, sive mQ. & cum harum linearum directionibus. Quarum attractionum ea quæ per MQ, vel mQ exponitur, reducitur ad attractionem MS, vel mS: auferendo nimirum attractionem ut QS satelliti primarioque suo communem, & proinde nullas anomalias inducentem. Quo pacto attractio satellitis secundum directionem SQ tendens, quæ in censum hic loci venire debet, reducitur ad attractionem MS, in loco P, quantum satelles magis quam primarius ad Solem attrahitur: & ad attractionem mS, in loco p, quantum satelles minus quam primarius attrahitur. Unde MS in priore casu, & mS in posteriore attractionum secundum SQ tendentium *differentiam*, sive Excessum & Defectum designabit. Atque adeo Satelles hoc pacto triplici ubique attractione, aut potius hujusmodi attractionibus quæ in triplicem attractionem rite resolvi possit, agitatur. Prima nempe & præcipua attractio illa est qua primarius S; eundem secundarium P, vel p trahit. Secunda est illa quæ est ipsi LM, vel lm proportionalis; cum lineæ LM, vel lm directione: hoc est, cum directione ipsius PS vel pS, ipsi LM vel lm parallelæ. Unde vis integra ex binis hisce composita etiam dirigitur versus S. Vis itaque hæc integra, ex binis hisce composita, cum centrum primarii S respiciat, efficiet ut corpus L, vel l, si hac sola agitaretur, areas circa idem centrum S describeret etiamnum temporibus proportionales: per Propositionem 15. Sed Satelles vi tertia etiam urgetur; quæ nempe est ut MS, vel mS, & cum directione ab M vel m

ver-

versus *S*: hoc est, ab *L*, vel *l* versus *F*, vel *f*. Nimirum in positione *P* satelles magis tendit ad Solem, quam primarius suus; atque id secundum directionem ipsi *QS* parallelam excessu *MS*. Et in positione *p*, satelles minus tendit ad Solem quam primarius, atque id secundum eandem directionem, ipsi *QS* parallelam, defectu *mS*. Quod eodem omnino redibit, ac si excessum *MS*, ab *L*, versus *F*; & defectum *mS*, ab *f* versus *l*; sive excessum ab *M* versus *S*, & defectum ab *m* versus *S* æstimemus: vel ac si satelles hinc inde à Sole duplici ad partes oppositas simul utrinque opposito perturbaretur. Ubi enim Primarius à secundario vero attractionis excessu versus Solem retrahitur, effectus iidem plane futuri sunt qui sequerentur omnes quoad primarium & apud eum sensibiles, quales nunc solum indagamus, si immoto primario secundarius eadem attractionis differentia in partes à Sole oppositas abstraheretur. Hæc autem vis tertia ex attractionum ipsi *SQ* parallelarum differentia oriunda, cum ad centrum *S* non tendat, neque vis integra ex tribus hisce composita totalis, nempe illa qua Satelles revera urgetur, ad centrum tendit. Quapropter Satelles non describet areas circa primarii centrum æquabiles, sive temporibus proportionales. Sed vis hæc per *MS*, vel *mS* exposita arearum descriptionem æquabilem, sive temporibus proportionalem, perturbabit. Nempe in semicirculi *CAD* quadrante *CA*, posito motu menstruo per *A. D. B. C.* ab occidente in orientem peracto, motum Satellitis circa *S* à *C* versus *A*, factum conspirando accelerat: post Conjunctionem vero in *A*, in quadrante *AD*, contrariando retardat. Satellite autem ad quadraturam circa *D* pervento evanescit vis tertia *MS*, vel *mS*. (quoniam *QK*, vel *Qk*: *QP* vel *Qp*: ac proinde etiam & *QL*, vel *Ql* tunc æquales sunt.) Et proinde vis per illam ubique expositæ nulli hic loci effectus esse possunt. Satel-

Prop. 17 & 18. *prim.*

telles igitur circa quadraturas reliquis viribus, iisque solis ad centrum primarii tendentibus agitatus, areas per radium vectorem æquabiles, sive temporibus proportionales describet. Dum vero Satelles quadrantem *DB* peragrat, *Qm* deficit à *QS*: & si vires perturbantes ad satellitem solum referamus, tendent eæ ab *m*, versus *S*; & conspirando motum ejus iterum accelerabunt: Post oppositionem vero in *B*, tendent vires etiamnum ab *m*, versus *S*; & contrariando motum satellitis retardabunt: donec iterum circa quadraturam *C* evanescat *mS*, ejusque proinde effectus cessent. Rursus, cum vis *MS* vel *mS* areæ perturbatrix in transitu Satellitis à *C*, ad *A*: & à *D*, ad *B* perpetuo augeatur: & in *A* ac *B* sit maxima; & hinc rursus perpetuo diminuatur in transitu satellitis ab *A* ad *D*, & à *B* ad *C*, donec in punctis *D* & *C* evanescat; Patet Satellitis motum ex primario spectatum esse cæteris paribus velocissimum in Syzygiis, *A* & *B*: tardissimum in Quadraturis *C* & *D*. Q.E.D.

Coroll. (1.) Hinc inæqualitatem istam in motu Lunari quam *Variationem* dicunt Astronomi solvere licebit: qua Luna ita in syzygiis velocius quam in quadraturis fertur, ut à syzygia ad octantem pergendo minuta prima quasi 35. lucretur ultra motum medium; & eandem quantitatem ob octante ad quadraturam pergendo iterum deperdat: atque ita perpetuo. Et consimilis anomalia in lunulis circumjovialibus & circumsaturniis est expectanda: quamquam ob majorem istarum Systematum à Sole & à nobis distantiam; & propter cursuum menstruorum tempora breviora vix aut ne vix quidem evadit sensibilis.

Coroll. (2.) Hinc etiam sequitur quod Orbita Satellitis cæteris paribus *curvior* erit in quadraturis, quam in Conjunctione & Oppositione. Et proinde, si per se sit circularis, evadet aliquantulum Ellipticus, circa Primarium in centro positum: ita ut Axis Ellipseos minor in Syzygiis, & major in quadraturis perpetuo colloce-

ncetur. Sin orbita sit per se Elliptica, circa prima-
ium in foco positum, magis ad istam Figuram accedet
uam si nulla hujusmodi anomalia afficeretur. Primus
uod sciam Cartesius hujusmodi oblongam Figuram or-
itæ Lunaris ex mera Hypothesi conjectura definivit:
terea tamen mirum errorem erravit, dum Lunam in
mnibus syzygiis ad terram propinquiorem, & in om-
ibus quadraturis remotiorem statueret: cum è contra
er propriam orbitæ Lunaris eccentricitatem, posita
psidum linea circa syzygias, Luna sit in summa apside,
uam in quadraturis à Terra remotior: non obstante
ac inæqualitate de qua jam verba facimus. Primus
utem hujusmodi oblongam Orbitæ Lunaris Figuram
er observata vere animadvertit Acutissimus Halleius;
ut saltem primus cum publico communicavit: & ex-
nde Lunæ Theoriam primus emendandam esse osten-
lit. Quod vero ad Corollarii hujusce demonstratio-
em spectat, illud ex propositione hac facile deducitur.
Corpora enim velociora minus deflectunt à recto tra-
mite quam tardiora: & præterea, vis perturbatrix ut
MS, vel *mS* in Conjunctione & Oppositione non so-
um est per se maxima, sed & directe contraria isti vi
qua corpus centrale *S* trahit corpus *P*, vel *p*: adeo-
que vim illam contrariando minuit. Corpus autem *P*
vel *p* minus deflectet à recto tramite, ubi minus urge-
tur in corpus centrale *S*, adeoque in orbita oblonga
Elliptica circa primarium feretur.

Maij 21. 1705.

XIX.

XXXII. SI ob diminutam & auctam per vices distan-
tiam inter Solem & Planetam primarium a-
ctio Solis augeatur ac diminuatur per vices, augebitur

ſimul ac diminuetur orbitæ Satellitis radius; & Tempus periodicum Satellitis circa primarium per vices mutabitur; augebitur nimirum cum aucto radio; & diminuetur cum diminuto.

Vis qua primarius trahit Satellitem augetur cum Satelles eſt in quadraturis *C*, & *D*, per additionem vis *SP*, vel *Sp*: evaneſcente vi *SM*, vel *Sm*: & diminuitur cum Satelles eſt in ſyzygiis, per ablationem vis *SM*, vel *Sm*. Et quia vis *SM*, vel *Sm* in ſyzygiis eſt quaſi duplo major quam *SP*, vel *Sp* in quadraturis; ubi *R* vel *r* punctum cum puncto *B*, vel *A* fere coaleſcit; vis primarii attractiva magis quolibet menſe Synodico diminuetur quam augebitur: adeoque pro abſolute diminuta eſt omnino cenſenda. Aucta igitur circa Syſtematis Perihelion Solis vi, languescet magis vis attractiva primarii, & dilatabitur orbita: diminuta autem circa Syſtematis Aphelion Solis vi, invaleſcet magis vis primarii attractiva, & contrahetur orbita. Una autem cum orbita dilatata augebitur tempus Satellitis periodicum: & una cum contracta orbita diminuetur tempus periodicum: atque ita quotannis motus Satellitis medius erit major & minor per vices; & in mediocri à Sole diſtantia ſola vere medius eſt habendus.

Corollarium (1.) Hinc inæqualitatem illam in motu Lunari annuam quæ medium ejus motum ſpectat ſolvere licebit: qua nempe motus Lunæ medius exceſſu & defectu 12′. fere motum vere medium excedit, & ab eodem deficit per vices: excedit nempe in tranſitu telluris ab apſide ſumma ad diſtantiam mediocrem; deficit à diſtantia mediocri ad apſidem imam: & iterum deficit ab apſide ima ad mediocrem diſtantiam; & à mediocri diſtantia ad apſidem ſummam excedit iterum. Atque ita in perpetuum. Neque aliter de Circumjovialibus & Circumſaturniis eſt in ſua Proportione cenſendum. Quanquam hæc inæqualitas & reliquæ etiam in iſtis tantillæ ſunt ubique, ut fere negligi debeant.

Coroll.

Coroll. (2.) Tempus periodicum Satellitis cujusvis vere originarium & primitivum, hoc est, quo primarium suum extra Solis vires positum circuitu integro pervolveret, paulo brevius est tempore periodico medio præsenti; & distantia originaria à primario suo paulo minor. Nempe si vires Solis, quæ jam semper vires primarii integro quovis cursu debilitant, tollerentur, appropinquaret satelles; & in minore distantia tempus brevius periodicum obtineret.

Coroll. (3.) Hinc etiam cum Cl. Gregorio inferre licet, quod si Primarius quivis Planeta novæ materiæ accessu evadat major, & inde ejus attractio in eadem ratione evadat major, Satelles in minori orbita & minore etiam tempore periodico revolveret. Similiter si primarius per ablationem materiæ diminuatur, Satelles in majori orbita, & majore etiam tempore periodico revolveret. Idemque respectu Primarii cujusque continget, si Sol ipse casu aliquo augeretur vel diminueretur.

Coroll. (4.) Cum itaque ex antiquissimis Astronomorum observatis cum nuperrimis collatis constet, tempora periodica primariorum circa Solem, & Lunæ, secundarii Planetæ, circa Terram esse eadem hoc seculo quæ ante annos bis mille fuerant, certum est tanto temporis spatio quantitatem materiæ tam in Sole quam in Terra æqualem fuisse; nec sensibili ullo augmento aut decremento obnoxiam.

Coroll. (5.) Sin quantitas materiæ in Terra è Diluvio Noetico aut aliunde aucta supponatur, Mensis periodici Lunaris quantitas ut tum temporis diminueretur erat necesse.

XXXIII. Si Planeta secundarius describat orbitam Ellipticam circa primarium in Ellipseωs foco positum; Hujus Ellipseωs Axis major, sive apsidum linea, quoad motum angularem progredietur & regredietur per vices: sed magis tamen progredietur: & in singulis satellitis revolutionibus per excessum progressionis feretur

in consequentia. In syzygiis nempe cum Sole progredietur; & in quadraturis regredietur.

Nam vis qua secundarius Planeta *P*, vel *p* urgetur in primarium suum circa quadraturas; ubi vis altera *MS*, vel *mS* evanuit, componitur ex vi *LM*, vel *lm* & vi centripeta corporis centralis *S*. Vis prior, si augeatur distantia aut diminuatur, augetur aut diminuitur in eadem fere ratione directe: ita ut in majori à primario distantia evadat major attractio versus centrum; & in minore minor. Vis autem posterior à Primario immediate orta in majori distantia evadit minor, & in minore major; estque semper in duplicata distantiæ ratione reciproce. Adeoque vis integra, sive *summa* virium versus primarii centrum ex distantia aucta decrescit in minore ratione quam est duplicata ratio distantiæ: hoc est, non tantum diminuitur in distantia majore, nec tantum augetur in distantia minore, quantum motus circa focum Ellipseos immobilis requirit. In conjunctione vero & oppositione, vis qua satelles in primarium urgetur est *differentia* inter vim qua primarius trahit secundarium, & vim *KL*, vel *kl*: sive in hoc casu *SM*, vel *Sm*. Et differentia illa, propterea quod vis *SM*, vel *Sm* augetur quam proxime in ipsa distantiæ ratione directe, decrescit in majore quam duplicata ratione distantiæ; atque adeo major est in minore distantia; & minor in majore, quam quæ Ellipsi immobili describendæ sufficiat. Si autem vis centripeta decrescat in ratione plusquam duplicata distantiæ, ut fit circa syzygias, accedetur aliquantulum ad casum vis centripetæ decrescentis in triplicata ratione distantiæ, unde motus in spirali, sine ulla tangentis ad radium mutatione sequeretur. Revolvet itaque satelles in Ellipsi quadam mobili, sive motus angularis major requiretur ut tangentes obliquæ ad radium evadant eidem perpendiculares; hoc est, ut satelles ad apsides suas perveniat, quam requireretur si vires essent in ipsa ratione distantiæ duplicata reciproce. Hoc est, apsidum linea progredietur.

tur. Et, è contra, Si vis centripeta decrescat in minore ratione quam distantiæ duplicata, ut fit circa quadraturas, casus contrarius sequetur : & satellitis motus à motu per spiralem angulum radii & tangentis non mutantem diverso orietur : Ita ut angulus iste citius mutetur, & ad rectam pertingat citius quam pertingeret si vires essent in ipsa ratione distantiæ duplicata reciproce : Hoc est, Apsidum linea regredietur. In locis autem inter syzygias & quadraturas intermediis pendet motus apsidis ex causa utraque conjunctim : adeo ut pro hujus vel alterius excessu progrediatur ipsa, vel regrediatur. Unde cum vis *KL*, vel *kl* in Syzygiis, ut nuper notavimus, sit quasi duplo major quam vis *LM*, vel *lm* in quadraturis; excessus in tota quavis revolutione erit penes vim majorem *KL*, vel *kl*; transferetque apsidem singulis revolutionibus in consequentia.

Coroll. (1.) Hinc inæqualitatem illam, sive motum progressivum & regressivum apsidis Lunaris solvere licet, qua ita movetur apogæum ut in Syzygiis suis progrediatur celerius, & in quadraturis regrediatur tardius : & excessu motus progressivi supra regressivum quovis mense feratur in consequentia, gradus tres circiter. Atque ita integrum circulum annorum decem spatio, aut paulo citius percurrat. In circumjovialibus, quæ in circulis fere moventur, nullæ vel insensibiles dantur apsides, adeoque locum non habet præsens demonstratio. In Circumsaturniis autem, sicubi occurrat eccentricitas nonnulla, locum aliquem habebit ; sed propter temporum periodicorum parvitatem, si cum ingenti Solis distantia, viribusque proinde ejusdem perexiguis, & Saturni ipsius magnitudine comparetur, Apogæi mutatio tantilla erit, ut nullo modo à nobis observari queat, nedum ad examen & calculum reduci.

Coroll. (2.) Cum itaque pendeat apsidum progressus vel regressus à decremento vis centripetæ, facto in majori vel minori quam duplicata ratione distantiæ *SP*, vel *Sp* in transitu corporis ab apside ima ad apsidem

N 3 sum-

ſummam; ut & à ſimili incremento in reditu ad apſidem imam, atque adeo maximus ſit ubi proportio vis in apſide ſumma ad vim in apſide ima maxime recedit à duplicata ratione diſtantiarum inverſa, manifeſtum eſt quod apſides in ſyzygiis ſuis per vim ablatitiam *KL*, ſeu *SM* — *LM*; vel *Sm* — *lm* progredientur velocius: *SP*, vel *Sp* tum temporis omnium minima; & *SM*, vel *Sm* omnium maxima in ſyzygiis exiſtente; & *SP*, vel *Sp*; ſive potius earum utrinque ſumma, in quadraturis exiſtente omnium minima. Unde in ſingulis ſatellitis revolutionibus, dum apſides ſunt circa ſyzygias, illæ celerrime progredientur in ſatellitis ſyzygiis, & tardiſſime regredientur in Satellitis quadraturis: atque adeo exceſſus motus progreſſivi ſupra regreſſivum erit omnium maximus, & apſides in conſequentia celerrime movebuntur.

Coroll. (3.) Sin Apſides circa quadraturas ponantur, ex cauſis contrariis contrarii ſequentur effectus; & apſides tardius quam prius progredientur, dum ſatelles eſt in ſyzygiis; & velocius regredientur, dum ſatelles eſt in quadraturis: imo vero fieri poteſt, ubi apſides ſunt in quadraturis, ut particulari aliqua ſatellitis revolutione regreſſus apſidum in ſatellitis quadraturis, ſuperet earundem progreſſum in ejuſdem ſyzygiis. Sed quoniam cæteris paribus vis ablatitia *SM*, vel *Sm* apſidum progreſſum in ſyzygiis ſatellitis inducens, eſt quaſi duplo major quam vis adjectitia apſidum regreſſum in quadraturis ſatellitis inducens; & quoniam præterea apſides diutius hærent in ſyzygiis quam in quadraturis; quia illic in conſequentia latæ cum Sole progrediuntur, atque adeo diutius eum quaſi comitantur; hic in antecedentia latæ Solis quadratum, in conſequentia latum, citius tranſeunt; patet apſides velocius & diutius progredi in ſyzygiis ſuis, tardius vero & non tamdiu recedere in quadraturis ſuis; & exceſſu progreſſus ſupra regreſſum in integra revolutione apſidum ad Solem, ſpatio nempe quaſi menſium tredecim, ferri etiamnum in

con-

consequentia. Sic sane in Orbita Lunari adeo inæqualiter apogæum ejus movetur, ut æquatione, ad gradus integros duodecim cum quadrante exsurgente, cohibenda sit, ut ex Tabulis Lunaribus discere licet.

XXXIV. Si Satelles in orbe eccentrico circa primarium suum moveatur, hujus orbis eccentricitas bis in quavis satellitis revolutione mutabitur, & in eadem revolutione erit hæc eccentricitas maxima cum satelles versatur in syzygiis cum Sole; minima vero cum sit in quadraturis: & per consequens eccentricitas in transitu satellitis à quadraturis ad syzygias perpetuo augebitur; &, è contra, in ejusdem transitu à syzygiis ad quadraturas perpetuo minuetur.

Cum enim ex ante demonstratis pateat quod vis centripeta versus primarium longe distantem nonnunquam decrescat in majori ratione quam distantiæ duplicata, nonnunquam in minore; & cum ex decremento in ipsa distantiæ ratione duplicata, eoque solo, motus satellitis in orbita immobili & datæ eccentricitatis sequatur; necesse est ut ex mutatione hujus rationis etiam orbitæ species mutetur. Sic sane, Ubi vires centripetæ, majori quam duplicata distantiæ auctæ ratione decrescunt; vel, quod eodem redit, ubi crescunt in majori quam duplicata distantiæ diminutæ ratione, Manifestum est quod satelles in descensu ab apside summa ad imam, perpetuo accessu vis illius novæ impulsus semper in centrum, magis verget in hoc centrum quam si urgeretur vi sola crescente in duplicata ratione distantiæ diminutæ: adeoque orbem describet orbe elliptico priore interiorem, & in apside ima propius accedet ad centrum quam prius. Orbis igitur accessu hujus vis novæ fiet magis eccentricus. Si jam vis in recessu satellitis ab apside ima ad summam decresceret iisdem gradibus quibus antea creverat, rediret satelles ad distantiam priorem; manente eccentricitate nuperrime obtenta. Sin vis decrescat in majori ratione quam prius creverat, satelles jam minus attractus ascendet ad distantiam majo-

rem; & ſic orbis eccentricitas adhuc magis augebitur.

Similiter prorſus, Si ſatelles in deſcenſu ſuo ab apſide ſumma urgeatur vi quæ augetur minus quam pro duplicata ratione diſtantiæ diminutæ, patet ſatellitem illum deſcripturum orbem orbe elliptico prius deſcripto, (ubi nempe vis centripeta erat reciproce ut diſtantiæ quadratum,) exteriorem, atque proinde minus eccentricum; & eccentricitatem hanc adhuc minui ſi in corporis aſcenſu vis centripeta decreſcat minus ſive tardius quam ante creverat. Si igitur ratio incrementi & decrementi vis centripetæ ſingulis revolutionibus augeatur, augebitur ſemper eccentricitas; & è contra diminuetur eadem ubi ratio illa decreſcat. Cum itaque in quavis ſatellitis revolutione vis iſta in ejuſdem ſyzygiis decreſcat in majori ratione quam duplicata diſtantiæ auctæ; & in ejuſdem quadraturis in minori; prout ex ante dictis liquet; manifeſtum eſt circa ſatellitis ſyzygias eccentricitatem orbitæ deſcriptæ augeri perpetuo, & circa quadraturas diminui. Et cum in pluribus revolutionibus inter ſe comparatis maxima ſit decrementi ratio in apſidum ſyzygiis, minima in earundem quadraturis, manifeſtum quoque eſt eccentricitatem orbitæ maximam eſſe ubi apſides ſunt in ſyzygiis; minimam vero ubi apſides ſunt in quadraturis: atque adeo eccentricitatem diminui perpetuo in tranſitu apſidum à ſyzygiis ad quadraturam Solis; augeri vero perpetuo in tranſitu earundem à quadraturis ad ſyzygias.

Corollarium. Hinc Orbitæ Lunaris eccentricitatem diverſam, & indies mutabilem; majorem nempe, cæteris paribus, in Lunæ conjunctione & oppoſitione, minorem in quadraturis; creſcentem etiam in tranſitu apogæi Lunaris ab oppoſitione vel conjunctione ad quadraturas; decreſcentem in ejuſdem à quadraturis ad oppoſitionem vel conjunctionem tranſitu, ſolvere licebit. Tanta vero apud tabulas Aſtronomicas ſtatuitur hujus eccentricitatis diverſitas, ut diſtantia inter focum & centrum Ellipſeωs à Luna deſcriptæ, quam ejus orbitæ

eccen-

eccentricitatem dicimus, nunc sit $\frac{66.782}{1.000.000}$ nunc solum $\frac{43.319}{1.000.000}$. si nimirum cum distantia Lunæ mediocri partium 1.000.000 comparetur. Atque adeo ut ista eccentricitatum differentia ultra totius eccentricitatis minimæ semissem assurgere deprehendatur. Verum de hac re impræsentiarum satis. Plura Termino Autumnali expectabitis.

Junij 4°. 1705.

XX.

XXXV. SI Satelles circa primarium revolvatur in orbe cujus planum ad planum orbis primarii circa Solem inclinatum fuerit, linea nodorum motu angulari movebitur in antecedentia, sive regredietur; at velocitate inæquali: celerrime quidem ubi nodi sunt in quadraturis; postea gradatim tardius, donec, nodis in syzygiis constitutis, prorsus quiescat. In locis inter quadraturas & syzygias intermediis nodi, conditionis utriusque participes, recedent tardius; adeoque semper vel retrogradi, vel stationarii, singulis satellitis revolutionibus ferentur in antecedentia. Et in eadem Satellitis revolutione celerius regredientur cæteris paribus, cum Satelles est in syzygiis, quam cum sit in aliis locis.

Ex viribus enim perturbatricibus, de quibus toties diximus, vis *LM*, vel *lm*, ipsi *SP*, vel *Sp* in plano orbitæ satellitis semper sitæ parallela, nullam plani orbitæ mutationem inducere potest. Vis etiam altera *MS*, vel *mS*, in plano eclipticæ sita, ubi nodi sunt in syzygiis etiam in orbitæ plano posita erit, utpote in communi utriusque plani intersectione tum temporis posita. At vero ubi nodi non sunt in syzygiis, vis hæc po-

posterior & major in eclipticæ plano semper sita, in plano orbitæ non erit posita; atque adeo motum satellitis in latitudinem afficiet lineamque nodorum in antecedentia remeare coget. Ponantur nimirum nodi in quadraturis positi, & vis hæc posterior plano eclipticæ parallelos agens satellitem, nodos in utramvis partem transeuntem, & in plano orbitæ suæ perrecturum, ab isto plano perpetuo retrahet; ita ut locus intersectionis proxime futuræ à plani prioris intersectione distet versus antecedentia. Ubi autem nodi sunt inter syzygias & quadraturas, vis hæc posterior nunc nodos in consequentia, nunc in antecedentia cedere coget; semper autem in integro Satellitis circuitu excessu virium in antecedentia regredi coget; unde in nodorum syzygiis manebunt illi immobiles: in eorundem quadraturis celerrime retrocedent: & in locis intermediis conditionis utriusque participes recedent tardius; adeoque semper vel retrogradi, vel stationarii, singulis revolutionibus ferentur in antecedentia. Notandum autem, orbita extra syzygias & quadraturas posita, dum satelles à nodo ascendente ad descendentem, vel à descendente ad ascendentem pergit, nodos tardius regredi quamdiu vis *MS*, vel *mS* plagam istam respicit plani ad quam satelles positus est; & tamdiu progredi quamdiu vis ista plagam oppositam respicit. Sic posita nodorum linea in octante Solis, post situm ejus in quadraturis, sive circa *R*, & *r*, Satelles planum eclipticæ supergressus circa *R* plagam solarem respicit; sed vis perturbatrix ab *R* ad quadraturam *C* tendit ad partes contrarias, per circuli nimirum octantem, deinde evanescente in quadratura vi perturbatrice, post eandem incipit vis versus Solem tendens; atque per tres reliquos octantes manet: ita ut orbitæ mobilis nodorum linea primum progrediatur paululum, deinde paulo plus regrediatur; atque consimiliter in altero semicirculo: donec, nodorum linea syzygias appellente, progressus & regressus sint inter se fere æquales: utrique vero ob situm plani orbitæ

orbitæ jam cum directione vis perturbatricis quasi coincidente, perexigui, & illico cessaturi. Quod vero in eadem Satellitis revolutione nodi celerius regrediuntur, cæteris paribus cum Satelles est in syzygiis quam alibi, palam est, propter vim perturbatricem eo loci majorem; atque adeo majorem effectum sortituram.

XXXVI. Iisdem positis, Inclinatio vel angulus acutus plani orbis satellitis ad planum eclipticæ perpetuo mutatur; & maxima est, cum nodi sunt in syzygiis cum Sole: minima vero, cæteris paribus, cum nodi sunt in quadraturis. Minuitur autem dicta inclinatio in transitu Satellitis à quadraturis ad syzygias; augeturque in transitu ejusdem à syzygiis ad quadraturas. Unde fit ut, Satellite in syzygiis existente, inclinatio planorum evadat minima; redeatque ad priorem magnitudinem circiter ubi Satelles ad nodum proximum accedit. Et in transitu nodorum à syzygiis ad quadraturas diminuitur hæc planorum inclinatio, & fit omnium minima, cæteris paribus, ubi nodi sunt in quadraturis: dein crescit inclinatio iisdem gradibus quibus antea decreverat: nodisque ad syzygias denuo reversis ad priorem magnitudinem redit.

Si prior propositio recte fuerit intellecta, hæc particulari explicatione minus indigebit. Sicut enim corpore ab *L* ad *F* motu priori pergente, Si accedat vis attrahens lineæ *LM* parallela versus partes ipsius *M*, per lineam *LM* exposita, perget corpus in diagonali *LQ*, & angulus inclinationis *MLQ* erit priore inclinationis angulo *MLF* minor. Vel etiam, Sicut corpore ab *L* ad *F* motu proprio pergente, Si accedat similis vis attrahens lineæ eidem *LM* parallela versus contrarias partes, per lineam æqualem exposita, perget corpus in diagonali altera; & angulus esset major angulo priore. Ita in casu nostro fieri debet, ut simul cum nodorum motu plani oscillatio sequatur. Ubi enim nodi sunt in quadraturis satellitem de plano orbis sui perpetuo detrahendo, minuit inclinatio-

nationem plani in transitu satellitis à quadraturis ad syzygias: augetque vicissim eandem in ejusdem transitu à syzygiis ad quadraturas: unde fit ut, satellite in syzygiis existente, inclinatio evadat omnium minima; redeatque ad priorem magnitudinem circiter ubi satelles ad nodum proximum accedit. At si nodi constituantur in octantibus post quadraturas, hoc est, circa *P* & *p*, intelligetur ex modo expositis quod in transitu satellitis à nodo alterutro ad gradum inde nonagesimum inclinatio plani perpetuo minuitur; deinde in transitu per 45. gradus usque ad quadraturam proximam inclinatio augetur; & postea denuo in transitu per alios 45 gradus usque ad nodum proximum diminuitur. Magis itaque diminuitur inclinatio quam augetur; & propterea minor est semper in nodo subsequente, quam in præcedente. Et simili ratiocinio inclinatio magis augetur quam diminuitur ubi nodi sunt in octantibus alteris, circa *R*, & *r*. Inclinatio igitur ubi nodi sunt in syzygiis est omnium maxima. In transitu eorum à syzygiis ad quadraturas, in singulis satellitis ad nodos appulsibus diminuitur; fitque omnium minima ubi nodi sunt in quadraturis, & satelles in syzygiis: deinde crescit iisdem gradibus quibus antea decreverat; nodisque ad syzygias proximas appulsis ad magnitudinem primam revertitur. *Q.E.D.*

Corollarium. Ex hac & superiori Propositione solvuntur notissima illa Astronomiæ Lunaris phænomena quibus nodi gradus $19\frac{1}{3}$ circiter annuatim regrediuntur; atque orbitæ Lunaris inclinatio est ita mutabilis ut cum nodi sunt in quadraturis angulus inclinationis sit $4^{\circ}. 59', 35''$. tantum; cum vero sunt in syzygiis ad $5^{\circ}. 17'. 20''$. circiter assurgere deprehendatur.

XXXVII. Omnes inæqualitates in motibus satellitum circa primarios suos revolventium paulo majores sunt in conjunctione satellitis cum sole, quam in ejusdem oppositione,

Cum

Cum enim *QS*, majorem habeat rationem ad *QA*, quam *QB*, habet ad *QS*, propter *SA*, *SB*, cæteris paribus, æquales; & *QS* majorem quam *QA*; erit & ratio duplicata *QM*, ad *QS*, adhuc major quam duplicata *QS*, ad *Qm*. Atque adeo differentia *MS* major differentia *mS*; & *LM* major quam *lm*. Unde effectus ab istis viribus derivati erunt majores quam qui ab alteris derivantur. *Q.E.D.*

Notandum autem distantiam Solis à Terra tam ingentem esse ut differentia virium circa conjunctionem Lunæ cum Sole, & circa ejusdem oppositionem admodum sit parva, & vixdum per observata distinguenda. Unde nullum locum huic differentiæ distinguendæ hactenus datum esse ab Astronomis mirari non debemus.

XXXVIII. Vires Solis absolutæ satellitum perturbatrices earumque effectus in diversis à Sole distantiis sunt in distantiarum ratione triplicata inverse.

Sit enim distantia Solis à satellite variata: & sit Radius orbitæ satellitis ad alterum radium in eadem ratione. Erit tum ubique distantia satellitis à primario ad distantiam Solis in data ratione: unde ex hac hypothesi vires absolutæ perturbatrices essent ut vires absolutæ Solis, sive in duplicata illa ratione. Hoc obtinuisset si systematis secundarii radius eadem ratione crevisset aut decrevisset atque ipsa Solis distantia creverat aut decreverat: ita ut eadem esset ad invicem ratio quæ prius. Sed cum radius nullatenus decrescat accedente Sole, nec augeatur recedente, ratio ista duplicata erit iterum augenda ratione altera ipsius distantiæ satellitis à primario. Unde integra ratio composita erit prioris triplicata. *Q.E.D.*

Exempli gratia; supponatur Sol duplo quam prius Telluri propior, sive ut 50 ad 100. Et sit *AB* diameter æqualis partibus duabus, erit vis absolutæ Solis quantitas ad *S* in distantia minore, quadrupla

quan-

quantitatis vis ejusdem in distantia majore. Sed vis SM in distantia minore erit ejusdem vis in distantia majore quasi octupla. Est enim $49 \times 49 = 2401$; & $50 \times 50 = 2500$. Unde $2500 - 2401 = 99$. Et $99 \times 99 = 9801$; & $100 \times 100 = 10.000$. Unde $10.000 - 9.801 = 199$. Ergo differentia virium absolutarum est fere in ratione dupla, sive ut 199 ad 99. Et ipsæ vires absolutæ mediocres sunt in ratione quadrupla, sive ut 4 ad 1. Ergo vires perturbatrices integræ ex istis compositæ sunt ut $4 \times 2 = 8$ ad $1 \times 1 = 1$. sive in ratione distantiæ reciproca triplicata fere. Et cum diameter apparens Solis sit tantum non in ratione distantiæ reciproca, & vires corporis centralis fere eædem, vires Solis satellitis perturbatrices, earumque effectus erunt in triplicata diametri Solis apparentis ratione directa quam proxime.

Scholium (1.) Eodem plane modo quo Sol extra satellitis cujusvis Orbitam constitutus ejus motum perturbat, Planetæ superiores inferiorum; Cometæ omnium Planetarum motus perturbabunt. Et actiones Planetarum vel Cometarum in alios Planetas similes producent effectus, utut longe minores; propter illorum corpora parva, si cum Sole conferantur, & distantias immensas. Aliqui tamen erunt hi effectus; [imo & inferiorum quoque Planetarum in superiores;] qui quidem si perstent, & in eandem plerumque plagam dirigantur, sensibiles tandem evadent. Exempli gratia, Orbitæ Telluris Apsides post plures annos sensibiliter in consequentia latæ deprehendi possent, licet admodum parvus hic motus sit oportet, si conferatur cum apsidum Lunæ motu in easdem partes. Sic sane ipsa Orbitæ Terrestris eccentricitas alicui mutationi ut obnoxia sit oportet; sed tantillæ sane ut vix aut ne vix quidem ex aliquo phænomeno colligi posset.

Scholium (2.) Sic quoque Planetæ superiores alienorum satellitum motus sensibiliter perturbabunt, si grandes sint, & si circa mutuam è Sole conjunctionem diu

hæreant,

hæreant, in minima nempe tum temporis distantia constituti. Sic sane Actio Jovis in Saturni satellites, & Saturni in Jovis satellites, posita nimirum mutua omnium Planetarum in se invicem pro materiæ quantitate gravitate, quam olim probabimus, nullatenus erit contemnenda: ubi nempe è Sole quasi conjuncti cernuntur. Sunt enim in se corpora ingentia, & tellure nostra multis vicibus majora, & satis tum propinqua, ut vires perturbatrices evadant sensibiles. Et revera esse sensibiles ex observatis Astronomicis olim demonstrabitur.

Scholium (3.) Virium autem perturbatricium quantitates è Sole in systema Saturnium vel Joviale redundantes ex quantitate virium in Lunæ nostræ anomaliis notissimarum facile derivare licet. Ex Notis enim distantiarum Telluris, Jovis, & Saturni à Sole rationibus; & Notis in Luna virium harum effectibus, ex certa quadam causarum & effectuum consimilium utrinque proportione à Newtono observata effectus harum virium etiam apud Jovem & Saturnum satis facile determinari possunt.

XXXIX. *Problema.* Invenire rationem inter vires quibus satellitis motus perturbatur à Sole, & vim qua satelles in orbe suo circa primarium retinetur, quæ gravitas in primarium dici debet.

Est enim vis perturbatrix integra ex viribus perturbatricibus LM, vel lm, & SM, vel Sm composita: est etiam, propter ingentem Solis distantiam, linea LQ, vel lQ ipsi lineæ MQ fere parallela; atque adeo vis LM vel lm mediocri suæ quantitati, sive satellitis radio SP, vel Sp est quam proxime æqualis: Et propter ingentem etiam Solis distantiam SM, vel Sm, sive LP, vel lp æquales sunt triplæ lineæ KP vel kp. Unde cum in triangulo SKP, vel Skp rectangulo ad K, vel k angulus KSP, vel kSp sit distantia satellitis à quadratura; & latus KP, vel kp, sit ad radium SP, vel Sp sinus rectus; erit vis perturbatrix SM, vel Sm, ad vim perturbatricem LM,

vel

vel *lm*, ut radius, ad triplum ſinum rectum diſtantiæ ſatellitis à quadratura proxima. Unde ſi ratio vis perturbatricis *SP*, vel *Sp* ad vim primarii centripetam, ſive ad vim gravitatis ſolum innoteſceret, vis perturbatrix *SM*, vel *Sm* facile innoteſceret. Quam itaque hac methodo inveſtigamus. Vis perturbatrix *SP*, vel *Sp*, eſt ad vim centripetam primarii in Solem, ut linea *SP*, vel *Sp*, ad lineam *SQ*; ſive ut diſtantia ſatellitis à primario, ad diſtantiam Solis ab eodem primario. Vis autem centripeta primarii in Solem, eſt ad vim centripetam ſecundarii in Primarium, ut temporum periodicorum quadrata, ducta in circulorum radios: Sive ut *SQ*, ad *SP*, vel *Sp*; & ut temporum periodicorum quadrata ſimul. Unde ex æquo vis perturbatricis quantitas, erit ad vim gravitatis, (ratione priore *SP*, vel *Sp* ad *SQ*, rationem alteram reciprocam *SQ*, ad *SP*, vel *Sp* perimente,) ut temporum Periodicorum quadrata. *Q. E. D.*

Corollarium (1.) Cum itaque tempus periodicum Lunæ ſit 39.343′. & tempus periodicum Terræ circa Solem 525.969′. Erit vis perturbatrix *SP*, ad vim gravitatis verſus Terram apud Lunam, ut 39.343′ × 39.343′, ad 525.969′ × 525.969′: Hoc eſt, ut 1.547.871.649 ad 276.643.388.961 ſive, ut 1 ad $178\frac{11}{15}$. Et cum vis *SM*, vel *Sm* in maxima ſua quantitate, ſive in ſyzygiis, ſit ad vim priorem ut 3 ad 1, erit vis *SM*, vel *Sm* in ſyzygiis ad vim gravitatis, ut 3, ad $178\frac{11}{15}$. ſive ut 1, ad $59\frac{2}{15}$. Eſt ergo vis iſta perturbatrix Solis *SM* vel *Sm* in ſyzygiis quaſi pars ſexageſima totius vis gravitatis Lunæ verſus terram. Sive potius, dempta vi *SP*, vel *Sp* in hoc caſu à vi *SM*, vel *Sm*, ut fieri poteſt, eſt vis integra perturbatrix in ſyzygiis, ad vim gravitatis ut 1 ad $89\frac{5}{15}$. ſive pars ejuſdem fere nonageſima. Et in locis aliis erit vis *SM*, vel *Sm*, ad vim gravitatis, (poſito ſinu toto unitati æquali,) ut triplus ſinus rectus diſtantiæ à quadratura proxima, ad $178\frac{11}{15}$.

XL.

XL. Si corpora plura fluida, aut diversa, aut in unum fluidum coalescentia circa Planetam primarium moveantur, singulæ fluidi partes motus suos ad legem satellitis peragendo propius accedent ad primarium cæteris paribus, & celerius movebuntur in conjunctione & oppositione ipsarum & Primarii, quam in quadraturis. Et Nodi annuli hujus, seu intersectiones ejus cum eclipticæ plano quiescent in syzygiis. Extra syzygias vero movebuntur in antecedentia; & velocissime quidem in quadraturis, tardius aliis in locis. Annuli quoque inclinatio variabitur; & axis ejus singulis revolutionibus menstruis oscillabitur, completaque revolutione ad pristinum situm redibit: nisi quatenus per præcessionem Nodorum circumfertur. Hæc omnia ex nuper demonstratis sua quasi sponte sequuntur: atque adeo peculiari demonstratione minime indigent.

Corollarium. Hinc Annuli Saturnii phænomena nonnula, modo fluidum sit, facile possunt intelligi. Imo vero, si solidum sit, ejusdem cum Ecliptica intersectiones sive Nodi quiescent in syzygiis suis, ubi nempe Sol in ipso annuli plano æque ac in eclipticæ plano reperitur. Extra syzygias autem regredientur: & celerrime quidem in quadraturis, tardius aliis in locis. Annuli quoque inclinatio variabitur, & axis ejus singulis circa Solem revolutionibus nutando bis inclinabitur in eclipticam, & bis redibit ad positionem priorem, nisi quatenus per præcessionem nodorum circumfertur. Ut ex ante dictis est apertissimum.

XLI. Si fluidum in alveo per superficiem cujusvis Planetæ sive primarii sive secundarii excavato contineatur, & una cum planeta suo motu periodico diurno uniformiter revolvatur; partes singulæ hujus fluidi per vices acceleratæ & retardatæ in syzygiis suis, sive in meridie & media nocte, velociores erunt; in quadraturis, sive hora sexta matutina & vespertina, tardiores quam superficies globi contigua: & sic fluet in alveo, refluetque per vices perpetuo. Ab inæquabili enim Solis at-

one turbabitur fluidum, eo quod major erit attractio partium propiorum, minor ea remotiorum; vis autem LM, vel lm trahet fluidum deorsum in quadraturis, sive ad horam sextam matutinam & vespertinam; facietque ipsius partes ibidem locatas descendere usque ad syzygias, sive ad Meridiem & Mediam noctem, & vis SM, vel Sm trahet eandem sursum in syzygiis, sistetque descensum ejus: & faciet ipsam ascendere usque ad quadraturas; atque ita perpetuo.

Corollarium. Hinc fluxus & refluxus maris causam discimus. Si nimirum Lunæ æque ac Solis vires perturbatrices agnoscamus; & quæ ante demonstrata sunt huic casui rite applicemus. Sed notissimum hoc atque maxime stupendum hactenus naturæ miraculum fusius & distinctius erit posthæc pertractandum: Eo itaque Lectorem remittimus.

Octob. 22°. 1705.

XXI.

XLII. SI globo perfecte sphærico ad partes æquatoreas circumaddatur annulus adjectitius solidus; eidemq; adhæreat; Cessabit quidem motus fluendi & refluendi: Sed Oscillatorius ille inclinationis motus, & præcessio Nodorum manebunt. Habeat Globus eundem axem cum annulo; gyrosque compleat iisdem temporibus; & superficie sua contingat ipsum interius, eique inhæreat, & participando motum ejus compages utriusque oscillabitur, & nodi regredientur. Nam globus, ut mox dicetur, ad suscipiendas impressiones omnes indifferens est. Annuli globo orbati maximus inclinationis angulus est ubi Nodi sunt in syzygiis. Inde in progressu Nodorum ad Quadraturas conatur is inclinationem suam minuere, & isto conatu motum imprimit Globo toti.

Re-

Retinet Globus motum impressum, usque dum annulus conatu contrario motum hunc tollat, imprimatque motum novum in contrariam partem. Atque hac ratione maximus decrescentis inclinationis motus fit in quadraturis nodorum; & minimus inclinationis angulus in octantibus post quadraturas. Dein maximus reclinationis motus in syzygiis, & maximus angulus in octantibus proximis. Et eadem est ratio Globi annulo nudati, qui in regionibus æquatoris vel altior est paulo quam juxta Polos, vel constat ex materia paulo densiore. Supplet enim vicem annuli iste materiæ in æquatoris regionibus excessus.

Coroll. (1.) Eadem ratione qua materia globi juxta æquatorem redundans efficit ut Nodi regrediantur, atque adeo ut per hujus incrementum augeatur iste regressus, per diminutionem vero diminuatur, & per ablationem tollatur; si materia plusquam redundans tollatur, aut, quod eodem recidit, si globus juxta æquatorem vel depressior reddatur, vel ratior quam juxta polos, orietur motus Nodorum in consequentia.

Coroll. (2.) Hinc etiam vicissim ex motu nodorum innotescit constitutio globi. Nimirum, si globus polos eosdem constanter servet, & motus fiat in antecedentia, materia juxta æquatorem redundat. Si in consequentia, deficit. Ponamus globum uniformem, & perfecte circinatum in spatiis liberis primo quiescere; dein impetu quocunque in superficiem facto propelli, & motum inde concipere partim circularem, partim in directum. Quoniam Globus iste ad axes omnes per centrum suum transeuntes indifferenter se habet, neque propensior est in unum axem, unumve axis situm quam in alium quemvis, perspicuum est quod is axem suum, axisque inclinationem vi propria nunquam mutabit. Impellatur jam Globus oblique in eadem illa superficiei parte qua prius, impulsu quocunque novo; & cum citior vel serior impulsus effectum nil mutet, manifestum est quod hi duo impulsus successive impressi eundem

producent motum, ac si simul impressi fuissent: hoc est, eundem, ac si globus, vi simplici ex utroque impulsu composita, fuisset impulsus; atque adeo simplicem circa axem inclinatione datum. Et par est ratio impulsus secundi facti in locum alium quemvis in æquatore motus primi; ut & impulsus primi facti in locum quemvis in æquatore motus, quem impulsus secundus absque primo generaret; atq; adeo impulsuum factorū in loca quæcunque. Generabunt hi eundem motum circularem, ac si simul & semel in locum intersectionis æquatorū motuum illorum, quos seorsim generarent, fuissent impressi. Globus igitur homogeneus & perfectus non retinet motus plures distinctos; sed impressos omnes componit, & ad unum reducit: & quatenus in se est gyratur semper motu simplici & uniformi, circa axem unicum inclinatione semper invariabili datum. Sed nec vis centripeta versus corpus extraneum quodvis tendens inclinationem axis, aut rotationis velocitatem mutare potest. Si Globus plano quocunque per centrum suum, & centrum in quod vis dirigitur transeunte dividi intelligatur in duo hæmisphæria, urgebit semper vis illa utrumque hemisphærium æqualiter, & propterea globum quoad motum rotationis nullam in partem inclinabit. Addatur vero alicubi inter polum & æquatorem materia nova, in formam montis cumulata, & hæc perpetuo conatu recedendi à centro sui motus turbabit motum globi, facietque polos ejus errare per ipsius superficiem, & circulos circum se punctumque sibi oppositum perpetuo describere. Neque corrigetur ista vagationis enormitas, nisi locando montem illum vel in polo alterutro; quo in casu, ut prius dictum, Nodi æquatoris progredientur: vel in æquatore; qua ratione, per prius etiam dicta, Nodi regredientur: vel denique altera axis parte addendo materiam novam qua mons inter movendum libretur: Et hoc pacto Nodi vel progredientur, vel recedent, perinde ut mons & hæcce nova materia sunt vel polo vel æquatori propiores.

Coroll. (3.) Cum itaque conſtet ex obſervatis Aſtronomicis, quod Nodi æquatoris terreſtris quotannis regrediantur per 50″ fere; qui quidem regreſſus *æquinoctiorum præceſſio* audit; ſequitur partes telluris æquatoreas eſſe partibus polaribus altiores. Et viciſſim, cum ex diurno telluris motu, ut inferius explicabitur, telluris figura ſit oblatæ ſphæroidis, partibus polaribus præ æquatoreis depreſſis, liquet exinde æquatoris nodos regredi debere quotannis.

Coroll. (4.) Ex prius dictis liquet etiam axem telluris oſcillari quotannis, & in quavis revolutione annua nutando bis in eclipticam inclinari, & bis redire ad poſitionem priorem. Liquet etiam maximum decreſcentis inclinationis plani æquatorei & ecliptici motum fieri in quadraturis nodorum, ſive in ſolſtitiis utriſque; & minimum inclinationis angulum in octantibus poſt quadraturas, ſive circa medios Leonis & Aquarii gradus: deinde maximum eſſe inclinationis motum in ſyzygiis nodorum, ſive in æquinoctiis, & maximum inclinationis angulum in octantibus proximis, ſive circa medios Tauri & Scorpii gradus. Sed propter parvitatem horum motuum omnino inſenſibiles erunt hujuſmodi effectus; nec ullis obſervatis Aſtronomicis deprehendendi. Notandum autem hiſce contrarios effectus telluri noſtræ, modo partes æquatoreæ polaribus eſſent depreſſiores, tribuendos fuiſſe.

Coroll. (5.) Hinc ultro corruit à Cl. Gregorio excogitatum effugium quaſi Paralaxis annua Stellarum fixarum à Cl. Flamſtedio toties reperta infirmo niteretur fundamento: & quaſi nec diſtantiam fixarum obſervatarum, nec ipſius telluris motum annuum exinde pro certo concludere liceret. Quin agamus igitur; & poſt prolata ipſa dubitantis & cavillantis Gregorii verba in arenam cum Viro Clariſſimo pauliſper deſcendamus. Methodum hanc fixarum parallaxin obſervandi Flamſtedianam olim expoſitam dedimus; nec actum itaque iterum agemus.

Prælect. Aſtronom. p. 33, &c.

Ex hac autem methodo rite intellecta omnino liquet, ſtellam, verbi gratia, polarem à polo mundi, ſive æquatoris Boreo circa ſolſtitium æſtivum quam circa hyemale diſtare magis; idque ſpatio admodum ſenſibili, nimirum 40″ aut 45″. Unde concludit Flamſtedius & dari revera Telluris motum annuum circa Solem, & fixas parallaxi annuæ ſatis ſenſibili eſſe obnoxias: earumque proinde diſtantias exinde colligi poſſe. Quid hic Gregorius? Num negat Stellam e. g. polarem magis à Polo Mundi Boreo diſtare circa ſolſtitium æſtivum quam brumale? Minime ſane. Num Axis Telluris Nutationem illam perexiguam, qua inclinationem eclipticæ & æquatoris ad ſolſtitia minui, ad æquinoctia augeri cum Flamſtedio ſupponit, hallucinationis cauſam opinatur? Nequaquam. Oſtenderat nimirum Flamſtedius hanc Nutationem perexiguam confirmare potius quam infirmare ſententiam ſuam. Quid ergo ſibi vult Vir Doctiſſimus. "Methodus hæc, inquit ille, fixæ parallaxin "determinandi ſupponit Telluris axem ſibi exactiſſime "eſſe parallelum: cum hæc in oppoſitis punctis ſuæ "orbitæ verſatur quando obſervationes inſtituuntur. Quidni ſupponat, aut exactiſſime, aut propoſito ſuo ſatis exacte ſibi ſemper parallelum? "Licet, pergit Gregorius, Axis Nutatio iſta exigua, de qua nuperrime "diximus, obſervationi Flamſtedianæ minime obſtet, "Alia tamen aliunde orta Nutatio totam hanc ſtellæ "polaris à polo diſtantiæ diverſitatem producere poterit. Si nimirum hæmiſphærii terræ auſtralis paulo "major ſit denſitas quam hæmiſphærii borealis (vel "propter minorem illi æſtatem quam huic, majuſque "frigus; vel propter continentium terræ ad polos poſitorum inæqualitatem, vel aliam cauſam quandam "nobis ignotam,) cum in ſolſtitio hyemali Polus Auſtrinus annuat ad Solem, & ſimul illi propior ſit "quam eſt polus Boreus: cumque tempore Solſtitii æſtivi hic ad Solem annuit, inclinabitur axis terræ ma-

Pag. 275.

"gis

" gis ad eclipticæ planum tempore hyemali quam æsti-
" vali, Angulus quo distat stella polaris à Polo minor
" esset in solstitio hyemali, quam in æstivo, licet stella
" polaris esset ad distantiam infinitam posita, & lineæ ab
" eadem ad orbem magnum ductæ pro parallelis haberi
" possent. Cum igitur totum quod per D. Flamstedii
" observationem conficitur illud sit, quod distantia an-
" gularis apparens stellæ polaris à polo in solstitio hye-
" mali quam æstivo minor sit, atque hoc ex duplici
" causa oriri possit, nempe ex rectarum à tellure in di-
" verso suo situ ad Stellam polarem concursu ad stellam
" polarem, si terræ axis in observationum una paralle-
" lus sit eidem in altera; Quod à Flamstedio supponi-
" tur: Vel ex rectarum cum terræ axe in diverso suo
" situ coincidentium consursu ad partes contrarias; po-
" sita stella polari infinite distante; ex observatione illa
" fixarum parallaxis non evincitur. Quoniam observa-
" tio integra consistere potest, rectis à diversis telluris
" locis ad stellam polarem infinite distantem ductis pa-
" rallelis manentibus; hoc est, Orbis magni parallaxi
" posita nulla. Imo hæc observatio, sic ait Gregorius,
" ne vel Telluris motum annuum immediate astruit.
" Nam licet Tellus in medio maneat, (circa axem, ut
" in Systemate semi-Tychonico, rotata cælestium motum
" diurnum apparentem efficiens,) Sol in signis australi-
" bus hemisphærium Terræ australe propius, & forte
" densius Soli tum obversum ita attrahere poterit, ut
" distantia stellæ polaris à polo in solstitio brumali mi-
" nor sit quam distantia eadem cum in Signis borealibus
" Sol remotior ejus hemisphærium boreale etiam forte
" minus densum minus attrahit. Hactenus D. Gregorius.
Et similem effugiendi rationem quoad reliqua Flamstedii atque Hookii observata eodem spectantia comminiscitur. Sed Respondeo:

(1.) Quod ad causas hujus Titubationis axis telluris *assignatas*, minorem nempe hæmisphærii australis æstatem, majusque frigus, aut continentium polarium in-

æqualitatem spectat; si Vir Cl. densitatem hæmisphærii australis præ boreali tantam quanta movendæ per tot minuta secunda telluris positioni sufficiat, ex his causis arcessere velit, idem omnino agit ac si Caucasum vecte è loco suo dimovere conetur. Demiror sane Viri doctissimi in hac re ἀγεωμετρησίαν, quod causarum tantillarum vires & quantitatem non prius aliquo modo æstimare voluerit, quam tantis effectibus pares statueret. Laudo tamen Viri Cl. prudentiam quod addiderit, *vel propter aliam causam quandam nobis ignotam:* Probe enim sciebat causæ ignotæ nullum iniri posse calculum: atque adeo se sibi in hoc negotio loco haud male cavisse. Interea, dicam aperte, diversæ hujus, quam somniat, hæmisphæriorum terrestrium densitatis causam nullam assignari posse, quæ non mechanicæ planetarum formationi, & phænomenis naturæ hodiernis simul adversetur. Respondeo

(2.) Si alterum telluris hemisphærium altero haud paulo altius aut densius esset, non exinde tamen titubationem hanc quam commentus est Cl. Gregorius secuturam. Hoc enim in casu oscillaretur quidem Axis Globi; sed ita, ut angulus inclinationis bis in anno ad maximam, & minimam quantitatem reverteretur; atque ita ut angulus iste ejusdem esset quantitatis in utroque solstitio; quod ipsius hypotheseos Gregorianæ fundamenta plane subvertit. Respondeo

(3.) Ex inæquali hac hemisphæriorum terrestrium altitudine, aut densitate, si modo æquatoris altitudinem aut densitatem vincat, sequi æquinoctiorum *progressum:* cum palam sit, & à Gregorio agnitum, ea omnino motu continuo *regredi.* Sin inæqualitatem hujusmodi solummodo statuat quæ majorem adhuc æquatoris altitudinem aut densitatem sartam tectam conservari ponat, ita ut quantum superent partes alteræ polares aut altitudine aut densitate, tantum deficiant alteræ, dico quod neque ex hac hypothesi causæ suæ adjumentum aliquod petere possit. Etenim propter virium in

al-

altero hemiſphærio defectum earum in altero hæmiſphærio exceſſum compenſantem, vires integræ axem moturæ etiamnum æquales manebunt, neque ullam ejuſdem titubationem efficient. Ita ut neque ex ſuppoſita inæquali iſta altitudine aut denſitate Titubatio axis Gregoriana ullo modo ſequatur. Reſpondeo

(4.) Si ipſam etiam axis terreſtris titubationem diſputandi gratia ſupponeremus, neque ſic ſcopum ſuum attingeret Gregorius. Talem enim iſte titubationem ſupponit qualis in ſolſtitiorum uno ad minimum inclinationis angulum axem reduceret, & ad maximum in altero. Ex principiis autem Newtoni prius poſitis, quæ & ipſius Gregorii ſunt pariter principia, ſequeretur maximum inclinationis axis angulum fore in octantibus poſt Nodorum ſyzygias, & minimum in octantibus poſt eorundem quadraturas; ita ut, quod prius diximus, in ipſis ſolſtitiis utriſque inter maximum & minimum angulum ubique intermediis nulla plane anguli inclinationis varietas ſit expectanda. Unde quoque, quod obiter eſt Notandum, & ipſe Flamſtedius, & eundem ſecutus Gregorius errant omnino, dum mutationem axis, cui æquinoctiorum præceſſio debetur, ullum hic locum habere ſupponant. Reſpondeo

(5.) Si denique ipſam axis nutationem, & tempore quo vult Gregorius, & in partes ab eo aſſignatas ſupponere placeret, Inclinationis quantitas longe minor foret, quam ut parallaxin Flamſtedianam potis eſſet efficere. Demus Gregorio Axem terræ quotannis oſcillari; demus quoque in æquinoctiorum altero oſcillationem fieri in hanc, in altero vero fieri in contrariam partem; itaut maxima quæ fieri poteſt differentia oriatur. Quantillula erit hæc differentiola? Nempe ex calculo olim adhibito conſtat oſcillationem illam grandiuſculam (comparative loquor) ex altitudine ſenſibili mille paſſuum quaſi 17, qua ſemidiameter æquatoris axem dimidium ſuperat orta, ad partem tantum unius minuti ſecundi aliquam aſſurgebat: cui

Prælect. Aſtronom. p. 40.

cui quantitati hæc oscillatio, mea quidem sententia, ne comparari quidem potest. Quid ergo hæ minutiarum minutiæ cum parallaxi ad integrum saltem unius minuti primi dodrantem assurgente? Eam nempe causa hæc ad effectum producendum habitura rationem quam puteus ad Oceanum. Sed me reprimo: & tandem concludo, effugium hoc Cl. Gregorii, quo fixarum parallaxin & annuum telluris motum ab Observatis Flamstedianis haud certo sequi contendit, haud exiguum esse ejusdem errorem, & labem non parvam operi alias pulcherrimo inurere.

Scholium. Notandum autem Cl. Flamstedium ratiocinia sua non recte in omnibus hoc loco instituisse, quod nuper annotarunt Galli: & Fixarum parallaxin nonnunquam ex phænomenis illam minime probantibus deduxisse; quod in tanto artifice mirandum. Veruntamen, cum rem penitius introspicerem, deprehendi ex Observationum solennium quindecim quas ipsi Galli veras esse, & suis consentaneas agnoscunt, Fixarum parallaxi etiamnum consentire undecim: & ex dissentientibus quatuor unam tantum ejus esse quantitatis ut negotium nobis facessere queat; quam proinde ab errore quodam, sive inter observandum, sive inter scribendum admisso derivatam fuisse æquum est ut existimemus. Præsertim cum similis fixarum parallaxis ex accuratis Hookii Observatis constare, nec aliunde solvi posse merito videatur. Sed hæc ulteriori Astronomorum industriæ sunt relinquenda.

Octob. 29°. 1705.

XXII.

XLIII SI singula Systematis Corpora ut *A* & *B* seorsim spectata trahant cætera omnia viribus acceleratricibus quæ sint reciproce ut Quadrata distantiarum à trahente, erunt corporum illorum omnium vires absolutæ ad invicem, ut sunt ipsa corpora.

Trahat corpus *A* vi acceleratrice per *a* exposita corpus *B*; & propter distantiam utrinque eandem trahat vicissim corpus *B* ipsum Corpus *A*, vi acceleratrice per *b* exposita. Quantitas motus est utrinque æqualis, propter reactionem utrinque actioni æqualem: Et ista motus quantitas ex velocitate in materiæ quantitatem ducta omnino oritur. Est itaque rectangulum *A* × *b* æquale rectangulo *B* × *a*. Et proinde vis acceleratrix corporis *B*, erit ad vim acceleratricem corporis *A*, paribus distantiis, ut Corpus *B* ad corpus *A*. Atque adeo Corporum vires absolutæ erunt inter se ut ipsa Corpora. Nimirum summa virium æqualium in partes æquales paribus distantiis ubique tendentium, *Q. E. D.*

Scholium. Hujusmodi Propositionibus manuducimur ad analogiam inter vires centripetas, & corpora centralia, ad quæ vires illæ dirigi solent. Rationi enim consentaneum est ut vires quæ ad corpora diriguntur pendeant ab eorundem natura & quantitate, ut fit in magneticis. Et quoties hujusmodi casus incidunt, æstimandæ erunt corporum attractiones assignando singulis eorum particulis vires proprias, & colligendo summas virium. Vocem autem *Attractionis* hic generaliter usurpamus pro corporum conatu quocunque accedendi ad invicem, sive conatus iste fiat ab actione corporum, vel se mutuo petentium, vel per spiritus emissos se invicem agitantium; sive is ab actione ætheris, aut aeris, mediive cujuscunque, seu corporei, seu incorporei oriatur, corpora innatantia utcunque in se invicem impellentis. Eodem sensu gene-

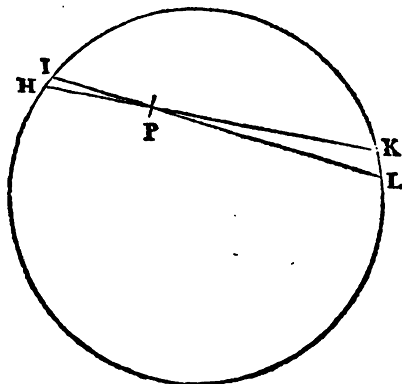
generali usurpamus vocem *Impulsus*: non species virium & qualitates physicas hic loci, sed quantitates & proportiones Mathematicas expendentes; ut in definitionibus prius explicuimus. In mathesi investigandæ sunt virium quantitates, & rationes illæ quæ ex conditionibus quibuscunque positis consequuntur. Deinde ubi in Physicam descenditur, conferendæ sunt hæ rationes cum phænomenis, ut innotescat, quænam virium conditiones singulis corporum attractivorum generibus competant: Et tum demum de virium speciebus, causis, & rationibus physicis tutius disputare licebit. Videamus igitur quibus viribus corpora Sphærica, qualia fere sunt majora omnia Systematis mundani Corpora, Sol, Fixæ, Planetæ, Cometæque, ex particulis, modo jam exposito, attractivis constantia debeant in se mutuo agere; & Quales motus inde consequantur.

XLIV. Si ad Sphæricæ superficiei Physicæ, sive crassitudinis ubique æqualis, sed contemnendæ, puncta singula æqualia tendant vires æquales centripetæ decrescentes in duplicata ratione distantiarum à punctis; Corpusculum intra superficiem ubilibet constitutum his viribus nullam in partem attrahetur: sed vel quiescet, vel motum quemvis inceptum sine perturbatione ulla continuabit, pariter ac si nullis omnino viribus à superficie ista urgeretur.

Sit *HIKL* Superficies illa Sphærica: & *P* corpusculum quodvis intus constitutum. Per *P* agantur ad hanc superficiem lineæ duæ rectæ quælibet, *HK*, *IL*, arcus quam minimos *HI*, *KL* intercipientes. Et ob triangula similia *HPI*, *LPK*, [*HI* enim & *KL* arcus quam minimi pro rectis lineis sumi debent; & anguli ad *P* verticem oppositi æquantur; & * latera æqualem istum angulum continentia, sunt utrinque proportionalia:] arcus illi erunt distantiis *HP*, & *LP* proportionales: hoc est, erit *PH*, ad *PL*, sive *PI*, ad *PK*, ut *IH*, ad *KL*. Et superficiei sphæricæ par-

* III, 35. *cum* VI, 14, & VI, 6. *Elem.*

particulæ quævis ad *HI*, & *KL* rectis innumeris per punctum *P* transeuntibus undique terminatæ, sive polygona sint, sive circuli, erunt figuræ inter se similes; & proinde in ratione arcuum istorum sive distantiarum à corpusculo duplicata. Et proinde, Vires integræ attractrices in contrarias partes æqualiter factæ, propter minoris superficiei situm propiorem, & majoris remotiorem, se mutuo destruent & tollent. Simili argumento attractiones omnes per totam sphæricam superficiem à contrariis attractionibus destruentur: Ac proinde Corpus *P* nullam in partem his attractionibus impelletur. *Q.E.D.*



Coroll. (1.) Cum itaque sphæra quævis, quæ spatium concavum concentricum sphæricum intus habet, in sphæricas hujusmodi superficies crassitiei contemnendæ innumeras recte dividi possit; & ex vi hujus demonstrationis superficierum quævis nullo modo corpusculum intus constitutum in ullam partem attrahere possit; Liquet Totam Sphæram nullam in corpusculum interius vim imprimere. Sed corpusculum illud, si prius quiesceret, etiamnum quieturum; si prius motu qualicunque ferretur; etiamnum motu eodem perrecturum; non obstante sphæræ exterioris attractione.

Coroll.

Coroll. (2.) Et cum hoc de corpusculis quibuscunque corpus quodvis vel materiæ molem quamvis componentibus pari jure possit demonstrari; Liquet corpora quæcunque intra hujusmodi sphæram concavam posita non obstante sphæræ attractione, aut quiescere, aut motu quovis pristino etiamnum ferri.

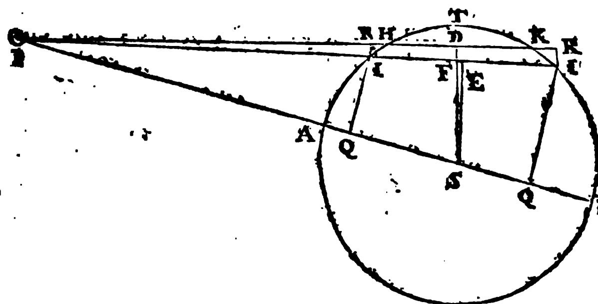
Coroll. (3.) Si itaque Tellus nostra, utpote Sphærica ex particulis attractivis composita, sphæricam cavitatem centralem habuisset, Animalia quælibet illic constituenda nulla gravitatis vi affecta motus omnes suos eadem libertate possent peragere, ac si nulla esset in rerum natura corporum gravitas. Neque sane ullam hujusmodi vim esse facile deprehendere potuissent. Et par est ratio de Planetis, reliquis Cometis, Sole, & stellis fixis.

XLV. Iisdem Positis Corpusculum extra sphæricam superficiem constitutum attrahetur ad centrum Sphæræ vi reciproce proportionali quadrato distantiæ suæ ab eodem centro.

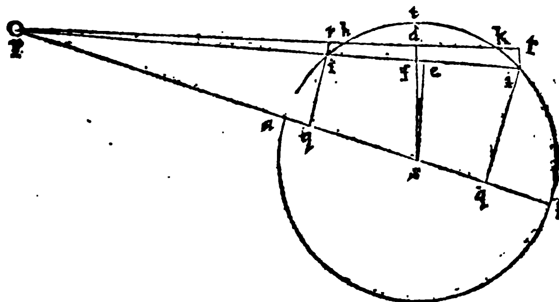
Sint apud Figuram hanc duplicem ubi earum altera majusculis, altera minusculis literis notatur, *AHKB*, *ahkb* æquales duæ superficies sphæricæ; (aut potius eadem superficies bis posita.) Centris *S*, *s* diametris *AB*, *ab* æqualibus descriptæ: Et *Pp* Corpuscula duo, (aut potius idem corpusculum ad varias à superficie sphærica distantias positum,) sita extrinsecus in diametris illis productis. Agantur à Corpusculis lineæ rectæ *PHK*, *PIL*: *phk*, *pil*: auferentes à circulis maximis *AHB*, *ahb* æquales arcus, quam minime inter se differentes, *HK*, *hk*: & *IL*, *il*. Et ad eas demittantur perpendicula *SD*, *sd*; ipsis *PK*, *pk*; *SE*, *se* ipsis *PL*, *pl*; *IR*, *ir*; ipsis *PK*, *pk*. Quorum *SD*, *sd* secent *PL*, *pl* in punctis *F*, & *f*. Demittantur etiam ad diametros perpendicula *IQ*, *iq*. & ob æquales *DS*, & *ds*: *ES*, & *es*: & angulos minimos evanescentes *DPE*, *dpe*, lineæ *PE*, *PF*; & *pe*, *pf* evanescentibus nimirum differentiis *FE*, *fe*; & Lineolæ

DF,

DF, *df* pro æqualibus haberi possunt: quippe quarum ratio ultima angulis illis *DPE*, *dpe*; & *DSE*, *dse* simul evanescentibus est ratio æqualitatis. His itaque constitutis, erit in triangulis similibus *PRI*, *PDF*: & *pri*, *pdf*, *PI*, ad *PF*, ut *RI*, ad *DF*: & *pf*, ad *pi*, ut *DF*, vel *df*, ad *ri*: Et utrisque rationi-



bus æqualibus in unam compositis, erit rectangulum *PI* × *pf*, ad rectangulum *PF* × *pi*, ut rectangulum *RI* × *DF*, ad rectangulum *DF* × *ri*: hoc est, ut *RI*, ad *ri*: hoc est, in triangulis ultimo similibus *IRH*,



irh, (propter angulum rectum ad *R*, & *r*; & angulum *RHI* angulo *rhi*, si circuli æquales applicarentur sibi mutuo congruentem;) ut arcus evanescens *IH*, ad arcum evanescentem *ih*. Rursus, Est in triangulis simi-

ſimilibus PIQ, PSF: piq, psf, PI, ad PS, ut IQ, ad SE: & ps, ad pi, ut SE, vel se, ad iq. Et, utriſque rationibus æqualibus in unam compoſitis, erit rectangulum $PI \times ps$, ad rectangulum $PS \times pi$, ut rectangulum $IQ \times SE$, ad rectangulum $SE \times iq$: hoc eſt, ut IQ, ad iq. Et conjunctis rationibus utriſque principalibus, Erit quantitas $PI \times PI \times pf \times ps$, ad quantitatem $pi \times pi \times PF \times PS$, hoc eſt, $PIq \times pf \times ps$ ad $piq \times PF \times PS$, ut rectangulum $IH \times IQ$, ad rectangulum $ih \times iq$: hoc eſt, ut Superficies circularis, ſive annulus quem arcus minimus IH convolutione ſemicirculi $AHTB$ circa diametrum AB deſcribet, ad ſuperficiem circularem, ſive annulum quem arcus minimus ih convolutione ſemicirculi $ahtb$ circa diametrum ab deſcribet. Et vires quibus hæ Superficies ſecundum lineas ad ſe tendentes attrahunt corpuſcula P & p ſunt, per Hypotheſin, ut ipſæ Superficies, niſi quantum diſtantiarum quadrata eaſdem vires adaugeant vel diminuant: & proinde ſunt revera vires illæ ut ipſæ Superficies, applicatæ ad quadrata diſtantiarum ſuarum à corporibus, hoc eſt, ut $\frac{PIq \times pf \times ps}{PIq}$, ad $\frac{piq \times PF \times PS}{piq}$: ſive ut $pf \times ps$, ad $PF \times PS$. Sunt quoque hæ vires integræ ad ipſarum partes obliquas, quæ, facta virium reſolutione ſecundum lineas PS, ps ad centra tendunt, ut PI, ad PQ: & pi ad pq: id eſt, (ob ſimilia triangula PIQ, PSF; & piq, psf:) ut PS, ad PF: & ps, ad pf. Unde, ex æquo, fiet attractio corpuſculi hujus P verſus centrum S, ad attractionem corpuſculi p verſus centrum s, ut $\frac{PF}{PS} pf \times ps$, ad $\frac{pf}{ps} PF \times PS$, ſive uu $PF \times pf \times ps \times ps$, ad $pf \times PF \times PS \times PS$, ſive etiam ut $ps \times ps$ vel psq, ad $PS \times PS$, vel PSq. Hoc eſt, ut diſtantiarum à centris ſuis quadrata reciproce. Et ſimili argumento, vires quibus Superfi-

cies remótiores convolutione arcuum remotiorum *HL hl* deſcriptæ trahunt corpuſcula, erunt ut diſtantiarum à centris ſuis quadrata reciproce. Inque eadem ratione erunt vires ſuperficierum omnium hujuſmodi circularium vel annularium, in quas utraque ſuperficies ſphærica; capiendo ſemper arcus æquales *HK*, *hk*: & *ITI*, *iti*: ſive, quod perinde eſt, perpendiculum *SD* æquale perpendiculo *sd*: & perpendiculum *SE* æquale perpendiculo *se* diſtingui poteſt: donec integra ſuperficies hoc modo exhauriatur. Et Inde, ſumma virium, ſive vires totarum ſuperficierum ſphæricarum in corpuſcula exercitæ erunt in eadem ratione. *Q.E.D.*

Coroll. (1.) Cum itaque ſphæra quævis integra in hujuſmodi ſphæricas ſuperficies concentricas innumeras recte dividi poſſit; & cum ex vi hujus demonſtrationis ſuperficierum quælibet ita corpuſcuum illud attrahat, ut vis attractionis verſus centrum ſit in duplicata ratione diſtantiæ reciproce, Palam eſt, & ſphæram integram ita corpuſculum illud attrahere, ut vis centripeta verſus centrum ſit in duplicata ratione diſtantiæ ab illo centro reciproce.

Coroll. (2.) Et cum vires reliquæ obliquæ *IQ*, *iq* ex adverſis hemiſphæriis æſtimatæ ſibi mutuo opponantur, & ſe invicem omnino tollant, vires integræ centripetæ in corpuſculum exercitæ erunt viribus iſtis verſus centrum tendentibus omnino æquales.

Coroll. (3.) Et cum ſimiliter procederet demonſtratio, ſi vice corpuſculi unius corpus quodvis ex iſtis corpuſculis compoſitum ſupponeretur; (quod enim uni particulæ convenit, pari jure & ſingulis particulis, & proinde ipſarum ſummæ convenire eſt neceſſe;) liquet ſphæram quamvis ex particulis æqualiter attractivis conſtantem, corpus quodvis ita attrahere, ut attractionis quantitas ſit in ratione diſtantiæ à ſphæræ centro duplicata reciproce.

Coroll. (4.) Attractio itaque ſphæræ eodem modo ſe habet ac ſi vis integra verſus centrum tendens in ipſum

centrum collecta uniretur, & ab isto solo puncto se undique per regiones in circuitu propagaret.

XLVI. Si ad sphærarum quarumvis homogenearum, sive ejusdem densitatis puncta singula tendant vires centripetæ æquales decrescentes in duplicata ratione distantiarum à punctis; ac detur ratio diametrorum sphærarum ad distantiam corporis ab earum centris; vires quibus corpora singula trahentur inter se collatæ erunt proportionales semidiametris sphærarum trahentium.

Nempe, vires sphærarum sunt ut ipsæ particulæ trahentes, sive ut ipsæ sphæræ; hoc est, in triplicata ratione semidiametrorum, paribus nimirum distantiis. Sed cum distantiæ inæquales ponantur, & in ipsa diametrorum vel semidiametrorum ratione inæquales, diminuentur vires in ratione distantiarum, hoc est, ex hypothesi semidiametrorum sphærarum duplicata. Vires itaque reliquæ, ab excessu rationis triplicatæ supra duplicatam æstimandæ, erunt in simplici semidiametrorum ratione directa. *Q. E. D.*

Coroll. (1.) Hinc si corpora quævis in circulis circa sphæras ex materia æqualiter attractiva constantes revolvantur; sintque distantiæ à centris sphærarum proportionales earundem diametris, vel semidiametris, Tempora periodica erunt æqualia. Ex viribus enim in directa distantiarum ratione sequitur temporum periodicorum æqualitas; ut olim demonstravimus.

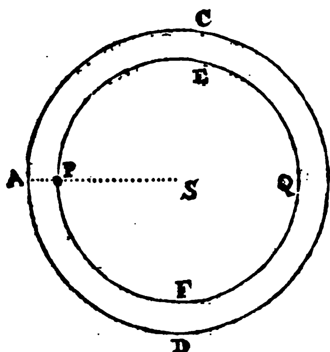
Coroll. (2.) Et vice versa; si tempora periodica sint æqualia, distantiæ corporum revolventium à sphæris homogeneis, sive ejusdem densitatis erunt diametris vel semidiametris sphærarum proportionales.

Coroll. (3.) Et ex datis temporibus periodicis circa sphæras quasvis peractis, & distantiis ab istis sphæris, dabuntur quoque sphærarum densitates. Nimirum calculum ineundo qualia exinde sequerentur tempora periodica ad distantias sphærarum semidiametris proportionales; & ab istorum temporum periodicorum excessu vel defectu mutuo densitatum defectum vel excessum eisdem

dem reciproce proportionalem determinando. Exempla in Sole, Jove, Saturno, & Terra olim proferemus.

XLVII. Si ad Sphæræ alicujus datæ homogeneæ, sive æqualis ubique densitatis puncta singula tendant æquales vires centripetæ, decrescentes in duplicata ratione distantiarum à punctis, Corpusculum intra sphæram constitutum attrahitur vi proportionali distantiæ suæ ab ipsius centro.

In Sphæra *ACBD*, centro *S* descripta locetur corpusculum *P*: & centro eodem *S*, intervallo *SP*, concipe sphæram interiorem *PEQF* describi. Manifestum est per Propositionem 44. Quod sphæricæ superficies concentricæ, ex quibus sphærarum differentia componitur, attractionibus ubique per attractiones contrarias destructis, nil agunt in Corpusculum *P*: Restat sola attractio Sphæræ interioris *PEQF*: decrescit itaque vis centripeta propter sphæram minorem attrahentem in triplicata ratione distantiæ à centro diminutæ, crescit autem in duplicata ratione distantiæ inversa, propter accessum ad Centrum. Ergo vis reliqua ab excessu rationis triplicatæ supra duplicatam æstimanda, erit in ipsa distantiæ à centro ratione directa. *Q. E. D.*



Coroll. (1.) Si hujusmodi sphæra per centrum perforetur, Corpora omnia à distantiis omnibus sive magnis sive parvis dimissa æquali temporis spatio ad centrum descendent: spatio nempe 21'. 9''. in Tellure nostra, uti olim observavimus.

Coroll. (2.) Si autem nullum sit medium quod motui corporum descendentium vel ascendentium adversetur, Corpus quodvis demissum per æquale spatium ultra

tra centrum aſcendet quo ad centrum deſcenderat prius: atque ita perpetuo deſcenſu & aſcenſu oſcillantium per cycloidem pendulorum corporum motus æmulabitur. Et oſcillationes, ſi ita vocare liceat, in omnibus diſtantiis erunt pariter iſochronæ.

Coroll. (3.) Sin intervalla quotvis minima hujuſmodi ſphæræ concentrica inter ſuperficies quaſvis ſphæricas interpoſita ponantur, in quibus corpora quævis inſtar planetarum quorundam parvorum circa centrum in circulis revolvant, Erunt tempora periodica omnium hujuſmodi planetarum ubique æqualia. Eodem nempe temporis ſpatio periodum quamvis peragendo quo corpus quodvis demiſſum oſcillationem integram ex itu & reditu compoſitam obiret: hoc eſt, in Tellure noſtra ſpatio $1^{h}. 24'. 36''$. Uti ex prius demonſtratis facile conſtare poteſt.

Scholium. Notandum autem ſuperficies iſtas ex quibus ſolida componi ſupponimus, non eſſe pure Mathematicas, vel omnis craſſitudinis expertes: Sed Orbes adeo tenues, ut eorum craſſitudo ſit inſtar nihili. Nimirum in caſu præſenti Orbes evaneſcentes ex quibus ſphæra ultimo conſtat, ubi orbium illorum numerus augetur, & craſſitudo minuitur in infinitum. Similiter per puncta ex quibus lineæ, & inde ſuperficies & ſolida componi nonnunquam dicimus, intelligendæ ſunt particulæ æquales magnitudinis contemnendæ. Sed hæc impræſentiarum ſufficiant.

Novemb. 19°. 1705.

XXIII.

XXIII.

XLVIII. POSITIS iisdem, Corpusculum extra sphæram constitutum attrahitur vi reciproce proportionali quadrato distantiæ suæ ab ipsius centro. Nam distinguatur Sphæra in superficies sphæricas innumeras concentricas: & attractiones corpusculi à singulis superficiebus oriundæ erunt reciproce proportionales quadrato distantiæ corpusculi à centro, per Propositionem 45. Et componendo, Fiet summa attractionum, hoc est, attractio sphæræ totius in eadem ratione. *Q.E.D.*

Coroll. (1.) Hinc in æqualibus distantiis à centris homogenearum sphærarum attractiones sunt ut ipsæ sphæræ; sive ut diametrorum Cubi inter se. Nam per Propositionem 46. Si distantiæ sint proportionales diametris, sphærarum vires erunt ut diametri: Minuatur distantia major in illa ratione, & distantiis jam factis æqualibus augebitur attractio in duplicata illa ratione, adeoque erit ad attractionem alteram in triplicata illa diametrorum ratione, hoc est, in ratione ipsarum sphærarum.

Coroll. (2.) In distantiis quibusvis Attractiones erunt ut sphæræ applicatæ ad quadrata distantiarum.

Coroll. (3.) Si corpusculum extra sphæram homogeneam positum trahatur vi reciproce proportionali quadrato distantiæ suæ ab ipsius centro, constet autem sphæra ex particulis attractivis, decrescet vis particulæ cujusque in duplicata ratione distantiæ à particula.

Coroll. (4.) Cum itaque Planetæ primarii simul & secundarii omnes ad Solis centrum; Omnes Circumjoviales ad Jovis centrum; Omnes Circum-Saturnii ad Saturni centrum; & Luna ad Telluris centrum trahantur, ad sua nempe quivis centra in distantiis variis, vi reciproce proportionali quadrato distantiarum ab istis centris respective; Decrescit vis particulæ cujusque molem Solis, Jovis, Saturni, & Telluris componentis in duplicata ratione distantiæ à particula.

XLIX. Si ad sphæræ homogeneæ datæ puncta singula tendant vires æquales centripetæ, decrescentes in duplicata ratione distantiarum à punctis, Sphæra quævis alia similaris attrahetur vi reciproce proportionali quadrato distantiæ centrorum.

Nam particulæ cujusvis attractio est reciproce ut quadratum distantiæ ejus à centro sphæræ trahentis: per Propositionem 45. & propterea eadem est ac si vis tota attrahens manaret de corpusculo unico sito in centro hujus sphæræ. Hæc autem attractio tanta est quanta foret vicissim attractio corpusculi ejusdem, si modo illud à singulis sphæræ attractæ particulis eadem vi traheretur, qua ipsas attrahit. Foret autem illa corpusculi attractio per Prop. postremam reciproce proportionalis quadrato distantiæ ejus à centro sphæræ; adeoque huic æqualis attractio sphæræ est in eadem ratione. *Q.E.D.*

Coroll. (1.) Attractiones Sphærarum homogenearum versus alias sphæras homogeneas sunt pariter ac eæ punctorum sive corpusculorum minimorum ut sphæræ trahentes applicatæ ad quadrata distantiarum centrorum suorum à centris earum quas attrahunt.

Coroll. (2.) Idem valet ubi sphæra attracta etiam attrahit. Namque hujus puncta singula trahent singula alterius eadem vi qua ab ipsis vicissim trahuntur; adeoque cum in omni attractione urgeatur tam punctum attrahens, quam punctum attractum, geminabitur vis attractionis mutuæ, conservatis proportionibus.

Coroll. (3.) Eadem omnia, quæ superius de motu corporum circa *Umbilicum* Conicarum sectionum demonstrata sunt, obtinent ubi sphæra attrahens locatur in umbilico, & corpora moventur extra sphæram.

Coroll. (4.) Ea vero quæ de motu corporum circa *Centrum* Conicarum Sectionum demonstrantur, obtinent ubi motus peraguntur intra sphæram: nimirum ubi sphæra non concava, sed aliquantulum concavis partibus interrupta supponitur, uti haud ita pridem observavimus.

L. Si

L. Si Sphæræ in progressu à centro ad circumferentiam (quoad materiæ densitatem, & vim attractivam) utcunque dissimilares, in progressu vero per circuitum ad datam omnem à centro distantiam sint undique similares, & vis attractiva puncti cujusque decrescat in duplicata ratione distantiæ corporis attracti; vis tota qua hujusmodi sphæra una attrahit aliam, est reciproce proportionalis quadrato distantiæ centrorum.

Etenim hujusmodi sphæra in sphæricas superficies concentricas similares semper dividi potest. Et cum nuper demonstratum fuerit, quamvis superficiem seorsim spectatam alias omnes seorsim spectatas ita trahere, ut vis tota qua hujusmodi sphærica superficies alteram quamvis trahit, sit reciproce proportionalis quadrato distantiæ à centro suo, constabit propositio de sphæris integris ex hujusmodi superficiebus conflatis. *Q. E. D.*

Coroll. (1.) Hinc si ejusmodi sphæræ complures sibi invicem per omnia similes se mutuo trahant, attractiones acceleratrices singularum in singulas erunt in æqualibus centrorum distantiis ut sphæræ ipsæ attrahentes; sive ut materiæ quantitates in iisdem contentæ.

Coroll. (2.) Inque distantiis quibusvis inæqualibus ut sphæræ attrahentes applicatæ ad quadrata distantiarum inter sphærarum centra.

Coroll. (3.) Attractiones vero motrices, seu pondera sphærarum in sphæras in æqualibus centrorum distantiis ut sphæræ attrahentes & attractæ conjunctim: id est, ut contenta sub sphæris per multiplicationem producta. Nam cum corpus attrahens propter reactionem actioni ubique æqualem & in partes contrarias tendentem versus corpus attractum pari motus quantitate, hoc est, celeritate corporibus reciproca, moveatur; idque si nulla esset corporis attracti vis proprie attractiva: Et cum iis qui sphæram aliquam incolunt tota approximantium sphærarum velocitas sphæræ alteri necessario referatur; eo nimirum quod motum proprium dignoscere nequeant; hinc evenit ut vis alterius sphæræ centripeta uni-

versa, qua nimirum ad suam appropinquat, aut potius qua utraque conatu mutuo ad amplexus mutuos fertur, quæque *Pondus* alterius dicitur, proportionalis sit non sphæræ attrahenti solummodo, sed sphæris utrisque simul sumptis. Sic sane pondus corporis cujusvis in terram illud omnino dicitur quo corpus illud & terra velocitate accedendi relativa ad se mutuo feruntur. Sic sane Olim ostendimus gravitatem Lunæ in terram esse ejus quidem quantitatis ut spatio horarum 4. & minutorum primorum 20. fere ad ejus centrum caderet. Non quod omnis ista velocitas ad Lunam revera sit referenda; sed quod si omnis accedendi velocitas respectiva ex motu utriusque syderis oriunda ad Lunam solam referretur, prout incolis Terræ usu venire debet, efficeret illa ut isto temporis spatio Luna ad Telluris centrum caderet.

Prop. 23. prius.

Coroll. (4.) In distantiis inæqualibus atractiones motrices sive pondera sphærarum in sphæras erunt ut contenta illa applicata ad quadrata distantiarum inter centra.

Coroll. (5.) Eadem valent etiam à fortiori ubi attractio integra oritur à sphæræ utriusque virtute attractiva mutuò exercita in sphæram alteram. Nam viribus ambabus geminabitur attractio, Proportione servata.

Coroll. (6.) Si hujusmodi sphæræ aliquæ circa alias quiescentes revolvantur singulæ circa singulas; sintque distantiæ inter centra revolventium atque quiescentium proportionales quiescentium diametris; Tempora periodica erunt æqualia.

Coroll. (7.) Et vicissim si tempora periodica sint æqualia, distantiæ erunt proportionales diametris.

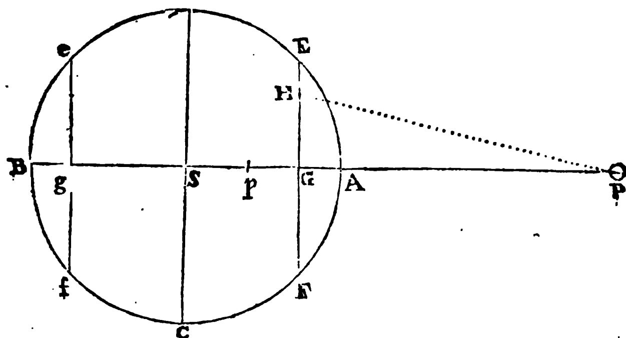
Coroll. (8.) Eadem omnia quæ superius de motu corporum circa umbilicos conicarum sectionum demonstrata sunt, obtinent ubi sphæra attrahens formæ & conditionis cujusvis jam descriptæ locatur in umbilico.

Coroll. (9.) Ut & ubi gyrantia sunt etiam sphæræ attrahentes conditionis cujusvis jam descriptæ: hoc est, aut in universum homogeneæ; aut saltem in iisdem à centro distantiis hom[illegible]

LI. Si

LI. Si ad ſingula ſphærarum homogenearum puncta æqualia tendant vires centripetæ æquales, nimirum paribus diſtantiis, diverſis autem diſtantiis iſtis punctorum à corporibus attractis directe proportionales; vis ex omnium partium viribus compoſita, qua ſphæræ duæ ſe mutuo trahent, erit ut diſtantia inter centra ſphærarum.

Casus (1.) Sit *ACBD* ſphæra ex hujuſmodi punctis attractivis conflata: *S* centrum ejus: *P* corpuſculum attractum: *PASB* axis ſphæræ, per corpuſculi centrum tranſiens: *EF*, & *ef* plana duo phyſica craſſitudinis contemnendæ, quibus ſphæra ſecetur, huic axi



perpendicularia, & hinc inde à centro ſphæræ æqualiter diſtantia. Puncta *G*, & *g* interſectiones planorum & axis: & *H* punctum quodvis phyſicum in plano *EF*. Vis centripeta puncti *H* in corpuſculum *P* ſecundum lineam *PH* exercita eſt, ex Hypotheſi, ut ipſa diſtantia *PH*: quæ per virium reſolutionem in vires *GH*, *GP* erit diſpeſcenda. Unde vis ſecundum lineam *PS*: hoc eſt, verſus centrum *S*: ut ipſa longitudo *PG*. [nimirum virium parte altera *HG*, à vi puncti ad alteras axis partes in eodem plano directe oppoſitas æqualiter ab axe diſtantis deſtructa.] Vis igitur punctorum omnium in plano *EF*; hoc eſt, vis plani totius

totius qua corpusculum *P* trahitur versus centrum *S* simili modo erit ut numerus vel summa punctorum ducta in distantiam *PG*: hoc est, ut contentum sub plano ipso *EF*, & distantia illa *PG*. Et consimiliter vis plani *ef* qua corpusculum *P* trahitur versus centrum *S*, est ut æquale illud planum ductum in distantiam illam *Pg*. Et summa virium plani utriusque ut planum *EF*, ductum in summam distantiarum *PG* + *Pg*; id est, ut planum illud ductum in duplam centri & corpusculi distantiam *PS*: [propter lineas *PG*, *PS*, *Pg* Arithmetice proportionales; & exinde summam extremarum æqualem mediæ duplæ.] Hoc est, ut duplum planum *EF*; sive summa planorum æqualium ductum in distantiam *PS*. Et simili argumento vires omnium planorum in tota sphæra hinc inde à centro sphæræ æqualiter distantium sunt ut summa planorum ducta in distantiam *PS*: hoc est, ut sphæra tota ducta in distantiam centri sui à corpusculo. Et ob sphæram in omni distantia datam erit vis integra attractiva ut distantia corpusculi attracti à centro sphæræ *PS*. *Q.E.D.*

CAS. (2.) Trahat jam corpusculum *P* sphæram, puncta nimirum omnia vi distantiæ punctorum à corpusculo directe proportionali: Et eodem argumento probabitur, quod vis qua sphæra illa trahitur, erit ut distantia *PS*. *Q.E.D.*

CAS. (3.) Componatur jam sphæra altera homogenea ex particulis pariter pro directa distantiæ ratione attractivis innumeris *P*. Et quoniam vis qua corpusculum unumquodque trahitur est ut distantia corpusculi à centro sphæræ primæ ducta in sphæram eandem; atque adeo eadem est ac si prodiret tota de corpusculo unico in centro sphæræ; vis tota qua corpuscula omnia in sphæra secunda trahentur, hoc est, qua sphæra illa tota trahitur, eadem erit ac si sphæra illa traheretur à vi prodeunte de corpusculo unico, in centro sphæræ primæ posito. Et propterea proportionalis erit distantiis inter centra sphærarum. *Q.E.D.*

CAS. (4.) Trahant jam ſphæræ ſe mutuo: & vis duplex ſive geminata proportionem priorem etiamnum ſervabit. *Q.E.D.*

CAS. (5.) Locetur jam corpuſculum p intra ſphæram $ACBD$. & quoniam vis plani ef in corpuſculum erit ut contentum ſub plano illo, & diſtantia pg: ſeu ut $ef \times pg$. & vis contraria plani EF ut contentum ſub plano illo, & diſtantia PG, ſeu ut $EF \times PG$: ſive $ef \times PG$. Erit itaque vis attrahens ut differentia contentorum, hoc eſt, ut $ef \times \overline{pg - PG}$: vel ut duplum ef in differentiam $pg - PG$ dimidiam $= 2\, ef \times \frac{1}{2}\, \overline{pg - PG}$. Hoc eſt, ob æquales SG, Sg, ut ſumma æqualium planorum ducta in ſemiſſem differentiæ diſtantiarum, ſeu in pS diſtantiam corpuſculi à centro ſphæræ. Et ſimili argumento Attractio planorum omnium ut EF, ef, in ſphæra tota à centro hinc inde æqualiter diſtantium; hoc eſt, attractio ſphæræ totius erit ut ſumma planorum omnium, ſeu ſphæra tota, ducta in pS, diſtantiam corpuſculi à centro ſphæræ. *Q.E.D.*

CAS. (6.) Et ſi ex corpuſculis innumeris p componatur ſphæra nova homogenea intra ſphæram priorem ſita, probabitur, ut prius, quod attractio ſive ſimplex ſphæræ unius in alteram, ſive mutua utriuſque in ſe invicem erit ut diſtantia centrorum pS. *Q.E.D.*

LII. Si Sphæræ in progreſſu à centro ad circumferentiam, (quoad materiæ denſitatem & vim attractivam) utcunque diſſimilares; in progreſſu vero per circuitum ad datam omnem à centro diſtantiam ſint undique ſimilares, & vis attractiva puncti cujuſque ſit directe ut diſtantia corporis attracti, vis tota, qua hujuſmodi ſphæræ duæ ſe mutuo trahent, erit proportionalis diſtantiæ inter centra ſphærarum.

Etenim hujuſmodi ſphæra in circulos æquales EF, ef, & in iiſdem à centris G, g diſtantiis homogeneos ſemper dividi poteſt: & cum ex vi jam demonſtratorum quælibet perimeter circularis, ex quibus quivis integer circulus componitur, vim exhibeat pro-

por-

portionalem diſtantiæ à ſphæræ centro, vis integra erit etiam in ipſa diſtantiæ à centro ratione directa.

Corollarium. Quæ ſuperius in Propoſitionis 50. Corollariis de ſphærarum attractionibus, ubi lex attractionis erat in ratione diſtantiæ duplicata inverſe ſunt demonſtrata, ad hunc caſum applicata ubique valent, mutatis rite mutandis. Speciatim vero, Quæ olim de motu corporum circa *centra* Conicarum ſectionum demonſtrata ſunt, obtinent ubi attractiones omnes fiunt vi corporum ſphæricorum conditionis jam deſcriptæ, ſuntque corpora attracta ſphæræ conditionis ejuſdem.

Scholium. Attractionum caſus duos inſigniores jam dedimus expoſitos; nimirum ubi vires centripetæ vel decreſcunt in duplicata diſtantiarum ratione, vel creſcunt in diſtantiarum ratione ſimplici: Efficientes in utroque caſu ut corpora gyrentur in Sectionibus Conicis, ex lege nimirum priori circa *focum*, poſteriori circa *centrum* (& caſu priori corporibus *extra* ſphæras poſitis, poſteriori corporibus *intra* eaſdem poſitis congruente.) Et componentes corporum ſphæricorum vires centripetas eadem lege in receſſu à centro decreſcentes vel creſcentes cum ſeipſis. Quod eſt notatu dignum & ad phænomena ſyſtematis Solaris ſolvenda maxime accommodatum. Caſus cæteros, qui concluſiones minus elegantes exhiberent, & à conſtitutione mundi magis alienas, hic loci ſigillatim percurrere longum eſſet, & pene inutile. Præterea; poſt explicatas in prioribus corporum ſphæricorum attractiones, Pergere liceret ad leges attractionum aliorum quorundam ex particulis attractivis ſimiliter conſtantium. Sed iſta particulatim tractare minus ad noſtrum inſtitutum ſpectat. Sufficerit Propoſitiones quaſdam generaliores de viribus hujuſmodi corporum, deque motibus inde oriundis ob eorum in rebus Philoſophicis aliqualem uſum ſubjungere. Sed iſta in Prælectionem proximam differemus.

Decemb. 3. 1705.

XXIV.

XXIV.

LIII. SI media duo ſimilaria ſpatio planis parallelis utrinque terminato diſtinguantur ab invicem; & corpus in tranſitu per hoc ſpatium attrahatur vel impellatur perpendiculariter verſus medium alterutrum; neque ulla alia vi agitetur vel impediatur; Sit autem Attractio in æqualibus ab utroque plano diſtantiis ad eandem ipſius partem captis ubique eadem; Sinus incidentiæ in planum alterutrum, erit ad ſinum emergentiæ ex plano altero in ratione data; hoc eſt, qualiſcunque ſit angulus inclinationis ratio iſtorum ſinuum, ſemper eadem reperietur.

CASUS (1.) Sunto *Aa*, *Bb* plana duo parallela. Incidat corpus in planum prius *Aa*, ſecundum lineam *GH*: ac toto ſuo per ſpatium intermedium tranſitu attrahatur vel impellatur verſus medium incidentiæ: eaque actione deſcribat lineam curvam *HI*. & emergat ſecundum lineam *IK*. Ad planum emergentiæ *Bb* erigatur perpendiculum *IM*, occurrens tum lineæ incidentiæ *GH* productæ in *M*; tum plano incidentiæ *Aa* in *R*. Et Linea emergentiæ *KI* producta occurrat ipſi *HM* in *L*. Erit itaque linea *GM* curvæ hujus tangens in puncto *H*: & Linea *LK* ejuſdem tangens in puncto *I*. Centro *L*, intervallo *LI*, deſcribatur circulus ſecans tam *HM* in *P*, & *Q*; quam *MI* productam in *N*. Et primo ſi attractio vel impulſus ponatur, uniformis erit, juxta olim demonſtrata, curva illa linea *HI* Portio Parabolæ. Cujus è diametris una erit linea *LV* planis utriſque perpendicularis; & linea recta *HI* erit ejuſdem diametri Ordinata, ab eadem in puncto *C* biſariam diviſa. Hujuſce autem Parabolæ proprietas hæc eſt; ut rectangulum ſub latere recto ad verticem *H* pertinente; in hoc caſu, propter corporum velocitatem datam

Prop. 8. prius.

tam

† Coroll. 2. Prop. 8. prius.

tam hic suppositam, ubique † dato: & abscissa *HD*, vel eidem æquali *IM*, æquale sit ipsius semiordinatæ *DI*, vel eidem æqualis *HM* quadrato. Hujusce etiam Parabolæ tangens *HM* bisecabitur in puncto *L*: (ut enim in triangulis similibus *HCL*, *HIM*, est *HC*, ad *HI*, ita erit *HL*, ad *HM*. Sed *HC* est semissis *HI*: ergo erit & *HL* semissis *HM*.) Unde si ad *MI* demittatur perpendiculum *LO*, æquales semper erunt

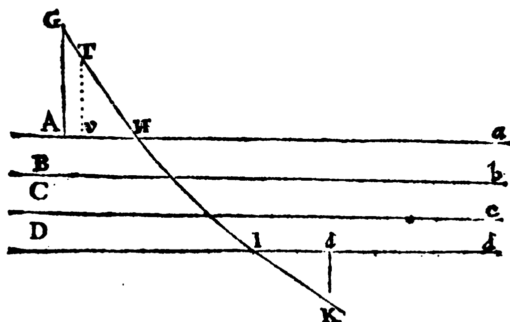
MO & *OR*: & additis æqualibus *IO*, *ON*, fient totæ æquales *MN*, *IR*. Cum itaque distantia planorum in omnibus inclinationibus *IR* detur; dabitur & in omnibus inclinationibus eidem æqualis *MN*. Est enim Rectangulum *NM* × *MI*, ad rectangulum sub latere recto ad verticem *H* pertinente & *MI* data *NM*, ad latus rectum datum; sive in data ratione

one. Eſt autem rectangulum ſub *HD* vel *MI*, & latus rectum, æquale quadrato *DI* vel *HM*. Atque adeo rectangulum *NM*×*MI*, eſt ad quadratum *HM*, in ratione data. Sed rectangulum *NM*×*MI* æquale eſt rectangulo *PM*×*MQ*: id eſt, differentiæ quadratorum *ML* & *PL*, ſeu quadratorum *ML* & *LI*. Et *HM* quadratum datam rationem habet ad ſui ipſius quartam partem *LM* quadratum. Ergo datur ratio *MLq* − *LIq*, ad *LMq*: & diviſim ratio *LIq*, ad *LMq*: & ratio ejuſdem ſubduplicata lineæ *LI*, ad lineam *LM*. Sed in omni triangulo *LMI* ſinus angulorum ſunt proportionales lateribus oppoſitis. Ergo datur ratio ſinus anguli incidentiæ *LMR*, vel *AHG* ad ſinum anguli emergentiæ *MIK*, vel *LIR*; vel ejuſdem ad duos rectos complementi *LIM*. [Idem enim eſt ſinus anguli *LIR*, & ejuſdem ad duos rectos complementi *LIM*.] *Q. E. D.*

Corollarium 1. *Prop.* 36. *Lib.* 3. *Elem.*

Corollarium 1. *Prop.* 20. *Lib.* 3. *Elem.*

CAS. (2.) Tranſeat jam corpus ſucceſſive per ſpatia plura parallelis planis terminata, *AabB*, *BbcC*, *CcdD*, &c. & agitetur vi quæ ſit in ſingulis ſeparatim



uniformis, at in diverſis diverſa: & per jam demonſtrata ſinus incidentiæ in planum primum *Aa*, erit ad ſinum emergentiæ ex plano ſecundo *Bb*, in data ratione:

one: Et hic ſinus, qui eſt ſinus incidentiæ in planum ſecundum *Bb*, erit ad ſinum emergentiæ ex plano tertio *Cc*, in data ratione: & hic ſinus ad ſinum emergentiæ ex plano quarto *Dd* in data ratione: & ſic in infinitum. Et ex æquo, Sinus incidentiæ in planum primum, erit ad ſinum emergentiæ ex plano ultimo, in data ratione. Minuantur jam planorum intervalla, & augeatur numerus in infinitum; eo ut attractionis vel impulſus actio ſecundum legem quamcunque aſſignatam continua reddatur; & Ratio ſinus incidentiæ in planum primum, ad ſinum emergentiæ ex plano ultimo ſemper data exiſtens, etiamnum dabitur. *Q.E.D.*

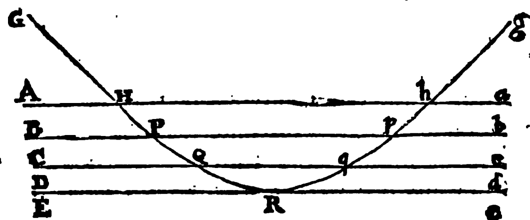
LIV. Iiſdem poſitis, Velocitas corporis ante incidentiam, erit ad ejuſdem velocitatem poſt emergentiam, ut ſinus emergentiæ, ad ſinum incidentiæ.

Capiantur *AH Id* æquales, & Erigantur perpendicula *AG*, *dK* occurrentia lineis incidentiæ & emergentiæ *GH*, *IK*, in *G*, & *K*. In *GH* capiatur *TH* æqualis *IK*, & ad planum *Aa* demittatur normaliter *Tv*. Et diſtinguatur motus corporis in duos, unum planis *Aa*, *Bb*, *Cc*, *Dd*, perpendicularem; alterum iiſdem parallelum. Vis attractionis vel impulſus agendo ſecundũ lineas perpendiculares nil mutabit motum ſecundum parallelas; & propterea corpus hoc motu conficiet æqualibus temporibus æqualia illa ſecundum parallelas intervalla, quæ ſunt inter lineam *AG* & punctum *H*, interque punctum *I* & lineam *dK*. Hoc eſt, æqualibus temporibus deſcribet lineas *GH* & *IK*. Et proinde velocitas ante incidentiam, erit ad velocitatem poſt emergentiam, ut *GH*, ad *IK*, vel *TH*; id eſt, ut *AH*, vel *Id*, ad *vH*; hoc eſt, (reſpectu radii *TH*, vel *IK*,) ut ſinus emergentiæ, ad ſinum incidentiæ. *Q.E.D.*

LV. Iiſdem poſitis; & quod motus ante incidentiam velocior ſit quam poſtea, Corpus, inclinando lineam incidentiæ, reflectetur tandem; & angulus reflectionis fiet æqualis angulo incidentiæ.

Nam

Nam concipe corpus inter plana parallela *Aa*, *Bb*, *Cc*, *Dd*, &c. describere arcus parabolicos, ut supra; sintque arcus illi *HP*, *PQ*, *QR*, &c. Et sit ea lineæ incidentis *GH* obliquitas ad planum primum *Aa*, ut sinus incidentiæ, sit ad sinum anguli recti, hoc est, ad radium circuli cujus est sinus, in ea ratione quam habet idem sinus incidentiæ primæ ad sinum emergentiæ ex plano ultimo *Dd*, in spatium per *DdeE* exprimendum. Et ob sinum emergentiæ jam factum æqualem radio, sive sinui anguli recti, Angulus ille emergentiæ erit rectus; adeoque linea emergentiæ coincidet cum plano *Dd*. Perveniat corpus ad hoc planum in puncto *R*. Et quoniam linea emergentiæ coincidit cum eodem plano, perspicuum est quod corpus non potest ultra pergere versus planum remotius per *Ee* exprimendum. Sed nec potest idem pergere in linea emergentiæ *Rd*,



propterea quod perpetuo attrahitur vel impellitur versus medium incidentiæ. Revertetur itaque inter *Cc*, *Dd*; describendo arcum parabolæ *QRq*; cujus Vertex principalis erit punctum *R*. Secabitque planum *Cc* in eodem angulo in *q*, ac prius in *Q*. dein pergendo in arcubus parabolicis *qp*, *ph*, &c. arcubus prioribus *QP*, *PH* similibus & æqualibus, secabit reliqua plana in iisdem angulis in *p*, & *h*, ac prius in *P*, & *H*; emergetque tandem eadem obliquitate in *h*, qua incidit in *H*. Concipe jam planorum *Aa*, *Bb*, *Cc*, *Dd*, &c. intervalla in infinitum minui, & numerum augeri;

eo ut actio attractionis vel impulsus secundum legem quamcunque assignatam continua reddatur; & Angulus emergentiæ semper angulo incidentiæ æqualis existens, eidem etiamnum manebit æqualis. *Q. E. D.*

Scholium. Harum attractionum haudquaquam dissimiles videntur Lucis refractiones & reflexiones factæ secundum datam Secantium rationem, ut invenit Snellius; & per consequens secundum datam Sinuum rationem, ut exposuit Cartesius: [cum enim sinus quilibet sit ad radium, ut radius ad secantem complementi; & Angulus incidentiæ inter radium & planum refringens Snellio dictus, sit Anguli incidentiæ inter radium & perpendicularem Cartesio dicti complementum; Ratio secantium à Snellio usurpata, cum ratione sinuum à Cartesio usurpata omnino congruet & coincidet.] Namque Lucem successive propagari, & spatio quasi septem aut octo minutorum primorum à Sole ad Terram venire jam constat per phænomena satellitum Jovis, observationibus diversorum Astronomorum confirmata: Radii autem in aere existentes, (uti dudum Grimaldus luce per foramen in tenebrosum cubiculum admissa invenit primus; & ipse quoque Newtonus plenius expertus est:) in transitu suo prope corporum vel opacorum vel perspicuorum angulos incurvantur circum corpora, quasi in eadem attracti: & ex his radiis ii qui in transitu illo propius accedunt ad corpora incurvantur magis, quasi magis attracti, uti ipse quoque Newtonus diligenter observavit, & fusius alibi nuperrime exposuit. Cum autem talis incurvatio radiorum fiat in aere extra cultrum, debebunt etiam radii qui incidunt in cultrum prius incurvari in aere quam cultrum attingunt. Et par est ratio incidentium in vitrum. Fit igitur refractio radiorum lucis non in puncto incidentiæ, sed paulatim per continuam incurvationem radiorum, factam nempe partim in aere antequam attingunt vitrum, partim etiam, ut videtur, in vitro postquam illud ingressi sunt. Nec aliter se res habere videtur

Optica L. III.

detur in reflexionibus, uti accurate oſtendit Newtonus in libro jam citato. Quo Lector harum rerum cupidius eſt omnino remittendus. Ob analogiam autem quæ eſt inter propagationem radiorum lucis, & progreſſum corporum, viſum fuit Propoſitiones tres priores veræ opticæ præparatorias demonſtrare. Notandum autem obiter cum Newtono, ad uſus opticos præ figuris conicis ſphæricas eſſe maxime accommodatas. Et ex ejuſdem ſententia, ſi perſpicillorum vitra objectiva ex vitris duobus ſphærice figuratis, & aquam inter ſe claudentibus conflentur, fieri poteſt ut errores refractionum quæ fiunt in vitrorum ſuperficiebus extremis ab aquæ refractionibus ſatis accurate corrigantur. Talia autem vitra objectiva vitris ellipticis & hyperbolicis præferenda eſſe ſtatuit, non ſolum quod facilius & accuratius formari poſſint, ſed etiam quod penicillos radiorum extra axem vitri ſitos accuratius refringant. Verum tamen diverſa diverſorum radiorum refrangibilitas impedimento eſt quo minus Optica per figuras vitrorum vel ſphæricas vel alias quaſcunque perfici poſſit. Niſi corrigi poſſint errores illinc oriundi Labor omnis in cæteris corrigendis imperite collocabitur. Sed de hiſce omnibus videndus eſt Author Clariſſimus in egregio illo & longe nobiliſſimo de Optice Tractatu, quem tandem in publicum emittere dignatus eſt.

Scholium (2.) Cum autem viſum fuerit viro ſummo Propoſitiones nonnullas ſine demonſtratione in iſto libro proponere, quæ moram legentibus injiciunt, Operæ pretium erit earum demonſtrationes, aut nuper adinventas, aut ab eodem viro alibi traditas hic loci apponere: Ut Tyronibus Opus iſtud Opticum, auro contra non carum, inoffenſo pede deinceps pertranſire liceat. Sed cum horulæ hujuſce ſpatio minime concludendæ ſint, eas termino poſt Natalitia proximo Reſervabimus.

Decemb. 10. 1705.

XXV.

PROP. (1.) SIT *ACB* ſuperficies ſphærica reflectens, cujus centrum eſt *E*. Biſecetur radius *EC* in puncto *T*. Et ſi in linea *EC* ad eandem puncti *T* partem ſignentur puncta *Q*, & *q*; ita ut *TQ*, *TE*, & *Tq* ſint lineæ continue proportionales Geometrice; & punctum *Q* ſit radiorum incidentium Focus, erit punctum *q* radiorum reflexorum Focus. Eſt enim ex hypotheſi $QT : TC :: TC : Tq$. Et Componendo $QT + TC = QC : QT :: CT + Tq = Cq : CT = ET$. Hoc eſt, $QC : QT :: Cq : ET$. Et alternando $QC : Cq :: QT : ET$. Sed per V. 19. Elem. $QT : ET :: QE : Eq$. Ergo ex æquo $QC : Cq :: QE : Eq$. Unde in triangulo cujus baſis eſt *Qq*, & vertex in ſuperficie ſphærica *ACB*, puncto *C* ſatis propinqua, ita ut laterum majus ſit ipſi *QC*, & minus ipſi *qC* quam proxime æquale, dividetur baſis *Qq* à puncto *E* ſphæræ centro, ita ut partes *QE* & *Eq*, ſint inter ſe in ratione laterum *QC* & *qC*. Et * proinde linea à Trianguli vertice per centrum *E* ducta verticalem trianguli angulum biſecabit; & æquales angulos utrinque præſtabit. Unde radii per *Q* tranſeuntes, eo quod angulus incidentiæ & reflectionis æquantur, reflectentur ad punctum *q*. & vice verſa. *Q.E.D.*

Pag. 7. Caſ. 2. Lib. 1.

* VI, 3. Elem.

PROP. (2.) Sit *ACB* ſuperficies refringens ſphæræ cujus centrum eſt *E*. In *EC* radio utrinque producto ſignentur puncta *T* & *t*; ita ut tam *ET*, quam *Ct*, (inter ſe nempe æquales,) ſit ad radium *EC*, ut ſinuum angulorum incidentiæ & refractionis minor, eſt ad iſtorum ſinuum differentiam. Dein ſignentur in eadem linea puncta *Q*, & *q*, ita ut *TQ*, ſit ad *ET*, vel *Ct*, ut eſt *Et*, ad *tq*. Sint autem ea punctorum loca ut linea *tq* ſit in plagam à puncto *t* ei contrariam quam habet linea *TQ*

Pag. 8. Caſ. 3.

quoad

quoad punctum T. Si autem focus radiorum Incidentium sit in puncto Q, Refractorum focus erit in q. Est enim ex hypothesi, ut TQ, ad TC, ita ET, ad tq. Et componendo, TQ, est ad $TQ + TC, = QC$, ut est $ET, = Ct$, ad $Ct + tq, = Cq$. Et alternando, est TQ, ad Ct, ut QC, ad Cq. Et componendo & invertendo ut $TQ + Ct, = QE$, ad TQ, ita $QC + Cq, = Qq$ ad QC. Sive Qq, ad QC, ut QE, ad QT. Unde per Cl. Hugenii demonstrata Dioptricæ suæ, *pag*. 26, *&c*. constat propositum. *Q.E.D.*

PROP. (3.) Sit $ACBD$ Lens refringens sphærica utrinque convexa, aut concava, aut saltem plano-convexa, vel plano-concava, Cujus Axis (sive linea utrasque superficies normaliter secans, & per sphæræ centrum transiens,) sit CD. In axe sint puncta F & f radiorum refractorum Foci, ut supra, inventi; ii nimirum qui radiis utrinque axi parallelis, si unica esset superficies refringens, congruerent. Bisecetur linea Ff in puncto E. & centro E, radio EF, vel Ef describatur circulus. Esto jam punctum quodvis Q, radiorum incidentium focus. Ducatur QE circulum priorem intersecans in punctis T & t, & in eadem linea signetur punctum q; illud nimirum ut linea tq, sit ad lineam tE, ut eadem tE vel ipsi æqualis TE, est ad TQ. Jaceat autem linea tq in plagam quoad punctum t ei contrariam quam habet TQ quoad punctum T. Erit tum punctum q radiorum refractorum focus; eorum nempe qui axi satis sunt propinqui, quorum tantum in hisce casibus ratio haberi debet. *Pag.* 8. *Caf.* 4.

Est enim ex hypothesi TQ, ad TE, ut tE, ad tq. Ergo componendo est TQ, ad $TE + TQ, = QE$, ut est tE, ad $tE + tq, = Eq$. Unde †TQ, est ad QE, ut est $TQ + tE, = QE$, ad $QE + Eq = Qq$. Unde liquet propositum. per demonstrata Hugenii Dioptricæ suæ *p*.67, *&c*. V, 12, *Elem.*

PROP. (4.) Mistura radiorum Solis in Spectro pt refracto, est ad mi- *Lib.* 1. *pag.* 46.

sturam Radiorum Solis per foramen vacuum transeuntium, ut istius spectri Latitudo, est ad latitudinis ejusdem & longitudinis differentiam, sive ut *ag* ad *gm*. Esto enim *ab*, ad *am*, ut *ag*, ad *AG*. Erit ergo spatium *ab* æquale omnibus minorum circulorum areis, in duplicata nimirum radiorum ratione utrinque. Et mistura radiorum esset æqualis, si modo omnes minores circuli in eo spatio coalescerent. Sed cum per spatium *pt* dispergantur, erit mistura ut *gh* ad *gm*. Unde cum mistura radiorum in spectro *PT*, sit ad misturam radiorum Solis foramen vacuum transeuntium, ut *AG*, ad *GM*, sive ut *ag*, ad *gh*: & mistura spectri *pt*, sit ad misturam spectri *PT*, ut *gh*, ad *gm*; erit ex æquo perturbate, mistura spectri *pt*, ad misturam radiis Solis sine refractione traseuntibus congruam, ut *ag*, ad *gm*. *Q.E.D.*

Prop. (5.) Si quod corpus data quacunque velocitate in spatium latitudinis contemnendæ, & parallelis planis utrinque terminatum, incidat, & inter transeundum versus planum remotius perpendiculariter attrahatur vel impellatur; ita ut vis attrahens vel impellens sit aut ubique eadem, aut saltem ad datas ab illo plano distantias eadem, velocitas perpendicularis corporis spatium illud prætergressi æquabitur summæ quadratorum velocitatis prioris, & velocitatis inter transeundum acquisitæ radici quadraticæ. Sin retardetur corpus inter transeundum, vice summæ quadratorum accipienda est eorundem differentia, & valebit propositio. Sequitur ex *Newt. Princip. Mathemat. Prop.* 39. *Probl.* 27. *Coroll.* 2.

Lib. 1. *pag.* 57.

Prop. (6.) Si quæ corpora vel Lucis Radii spatium hujusmodi parallelis planis terminatum pertranseuntia, & vi simili sed nunc majori nunc minori inter transeundum afficiantur, motus de novo acquisitus erit semper in subduplicata virium generantium ratione: ita ut motuum quadrata virium rationes veras determinent. Esto *AB* superficies refringens, sive exponat *AB* spatium contemnendæ

Lib. 2. *p.* 71, 72.

crassi-

craſſitudinis parallelis planis terminatum, cujus vi oritur radiorum refractio. Eſto etiam IC lucis radius obliquiſſime in planum refractivum incidens ad punctum C, ita ut anguli incidentiæ complementum ACI ſit indefinite parvum. Et eſt CR radius refractus. A puncto quovis dato B erigatur perpendicularis BR, radium refractum ſecans in puncto R. Et ſi CR radii refracti motum exponat, qui in duos motus CB, & BR reſolvatur, erit motus pars CB plano refringenti parallela, & BR eidem perpendicularis: & cum motus ſecundum planum AB à vi eidem perpendiculari nullatenus mutetur, dabitur CB; ob datam nempe radiorum velocitatem hic loci ſuppoſitam. Linea BR erit motus per refractionem dato tempore genitus. Et erit in ſubduplicata virium generantium ratione. Ob datam enim ſpatii refractivi latitudinem tempora tranſitus quibus vis refringens ageret, eſſent ut velocitates genitæ reciproce, ſive ut vires generantes reciproce; & ob velocitatem data vi in ratione temporum, eſſet linea BR ut vires generantes reciproce; & dato tempore ut vires generantes directe. Neutro ergo dato, erit linea BR in ſubduplicata ratione virium: tum enim temporibus & viribus ad æquilibrium reductis, neque vis tempori, neque tempus vi præponderabit: quæ nullibi alias ſibi invicem reſpondere potuiſſent. Sic ſane modo vires in ratione quadrupla ponantur, velocitas dupla in tempore dimidio generabitur: ſive linea BR erit ejuſdem lineæ dupla, & ita ubique. Q. E. D.

PROP. (7.) In Iridis ſolutione Arcus QF. & angulus AXR erunt maximi ubi ND, eſt ad CN, ut $\sqrt{II - RR}$ ad $\sqrt{3RR}$. Quo etiam in Caſu NE, erit ad ND, ut $2R$, ad I. Et Angulus AYS quem radii AN & HS conſtituunt erit minimus ubi ND, eſt ad CN, ut $\sqrt{II - RR}$, ad $\sqrt{8RR}$. Quo etiam in caſu NE, erit ad ND, ut $3R$, ad I. Quam Propoſitionem duplicem ſequenti rationum ſerie cum Cl. Newtono in Lectionibus ſuis Opticis MSS. demonſtrabimus,

Problema. Si Radii sive paralleli, sive versus commune aliquod punctum inclinati se sphæræ objiciant refringendos, refractorum extra axem sibi quam proximorum & in eodem plano cum incidentibus jacentium concursum designare. Sit *AN* incidens radius, *NK* refractus ejus; & *NV* in plano trianguli *ANK* recta linea tangens sphæram ad *N*. Ad *AN* duc *NR* perpendicularem, & occurrentem Axi *AC*, in *R*: nec non *RV* parallelam, & occurrentem tangenti *NV*, in *V*. Item ad *NK* duc *NQ* perpendicularem, & *VQ* parallelam, convenientes in *Q*. Et age *QC* occurrentem *NK* in *Z*. erit *Z* concursus radiorum ipsi *AN* viciniſſimorum. Sit enim *An* alius ex incidentibus priori *AN* infinite vicinus, & occurreus *NR*

in *G*. Age *nZ*, occurrentem *NQ* in *H*: & ad *AN*, & *NK* e *C* centro sphæræ demitte normales *CD*, & *CE*, occurrentes *An*, & *nZ* in *d*, & *e*. Jam cum *AN* supponatur infinite vicinus *An*, arcus infinite parvus *Nn* pro recta coincidente cum tangente *NV* haberi potest; ac triangula *NGn*, *NRV*; ut & *NHn*, *NQV* pro similibus. Quare est *DC* : *Dd* :: (*NR* : *NG* :: *NV* : *Nn* :: *NQ* : *NH*) : *EC* : *Ee*. Et converse *DC* : (*DC* — *Dd*) *dC* :: *EC* : (*EC* — *Ee*) *eC*; & viciſſim *DC* : *EC* :: *dC* : *eC*. Est autem

DC

DC ad EC ut ſinus incidentiæ, ad ſinum refractionis, propterea quod NK ſit refractus ipſius AN; adeoque etiam dC ad eC eſt ut ſinus incidentiæ ad ſinum refractionis; & proinde cum anguli DAd, & EZe ſint infinite parvi, atque adeo Cd, ad An; & Ce, ad nZ perpendiculares, vel ſaltem perpendiculis æquipollentes, erit nZ refractus ipſius An. *Q.E.D.*

Coroll. (1.) Eſt $ND : NE$ (ſive $NP : NF$) :: $NR : NQ$. Nam acta NC. propter triangulum NDC ſimile triangulo NRV; & triangulum NEC ſimile triangulo NQV; eſt $ND : NR$ (:: $NC : NV$) :: $NE : NQ$. & alterne, $ND : NE :: NR : NQ$.

Hinc promptior emergit Problematis reſolutio. Nempe ad Radios AN. NK erige normales NR. NQ. quorum NR axi AC occurrat; & NQ. ſit ad NR, ut NF, ad NP. Dein age QC quæ cum NK in quæſito Z conveniet.

Coroll. (2.) Eſt etiam $AN \times DC \times NE : AD \times EC \times ND :: NZ : EZ$. Nam eſt $AD : AN :: DC : NR$. & inde $NR = \frac{AN \times DC}{AD}$. Item $ND : NE :: NR : NQ$. & inde $NQ = \frac{AN \times DC \times NE}{AD \times ND}$. Adeoque $AN \times DC \times NE : AD \times ND \times EC$ (:: $NQ : EC$) :: $NZ : EZ$.

Coroll. (3.) Si punctum radians A infinite diſtet, ſive parallelos radios ejaculetur, poſito $I : R$ :: ſinus incidentiæ : ſinum refractionis : Erit $I \times NF : R \times NP :: NZ : EZ$. In hoc enim caſu AN, & AD, cum ſint infinite longæ, pro æqualibus haberi debent: atque adeo per Corollarium 2. hujus erit $DC \times NE : EC \times ND :: NZ : EZ$. Sed, ex hypotheſi, eſt $DC : EC :: I : R$. & proinde $I \times NE : R \times ND$ (:: $NZ : EZ$) :: $NP : NF$.

Notetur autem, Quod mutatis mutandis reſolutio Problematis cuicunque caſui facile accommodatur; ſive

radii

radii incidentes divergant à puncto aliquo, vel ad idem convergant, vel incidant paralleli.

Problema alterum. E Parallelis radiis ad circulum refractis radium illum determinare, cujus pars circulo inclusa datam habeat rationem ad partem refracti ejus eidem circulo inclusam. Sit AN radius incidens: NK refractus: NP, & NF partes eorum circulo inclusæ: CD, & CE perpendicula ad istas partes è centro circuli demissa: & BC semidiameter acta parallela AN. Sitque

$CD : CE :: I : R$, & $NP : NF :: p : q$. His positis, ut innotescat punctum N, quod radios AN, & NK determinat, erige ad BC, normalem BX, cujus quadratum, sit ad BC quadratum, ut $\frac{qq-pp}{pp}$, ad $\frac{II-RR}{II}$. & acta Cx secabit circulum in desiderato N. Est enim ex hypothesi, $p : q$ ($:: NP : NF ::$) $ND : NE$. Et $I : R :: CD : CE$, quare $\frac{q}{p} ND = NE$. & $\frac{R}{I} CD = CE$. Porro, cum sit $NDq + CDq$ ($= NCq$) $= NEq + CEq$: aufer hinc inde $NDq + CEq$, & restabit $CDq - CEq = NEq - NDq$: Hoc est, substituendo valores CE & NE modo inventos, $CDq - \frac{RR}{II} CDq := \frac{qq}{pp} NDq - NDq$: & facta reductione $\frac{II-RR}{II} CDq = \frac{qq-pp}{pp} NDq$. Quo in proportionalitatem resoluto,

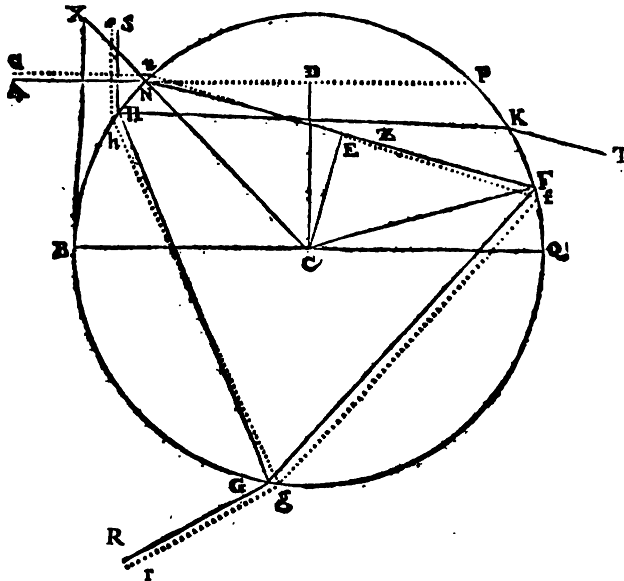
fiet

Sed $\frac{qq-pp}{pp} : \frac{II-RR}{II}$ (:: $CDq : NDq$) :: $BXq : BCq$. *Q.E.D.*

April 8. 1706.

XXVI.

Prob. (3.) SOLE sphæram pellucidam illustrante radiorum ejus post unam reflexionem emergentium maximam ad axem inclinationem determinare. Sit *BNK* sphæra proposita: *BQ* diameter, sive axis incidentibus radiis parallelus: *AN* aliquis ex



incidentibus: *NF* refractus ejus: *FG* reflexus: & *GR* denuo refractus: & quærendus erit maximus angulorum quos *RG* cum Axe *BQ* potest conficere.

In

In quem finem advertendum eſt quod eo ſolo in caſu ubi RG maxime inclinatur ad BQ, radii ipſi AN viciniſſimi poſſunt emergere paralleli ad RG. Nam in aliis caſibus ex emergentibus radiis ſibi viciniſſimis alii magis, alii minus continuo inclinantur ad BQ; adeoque aliquantulum inclinantur ad ſe invicem.

Advertendum eſt præterea quod radii emergent paralleli qui conveniunt ad punctum reflexionis. Duc enim radium an, ipſi AN parallelum, & quam proximum. ſitque ejus refractus nf: reflexus fg: ac iterum refractus gr. Et punctis F & f coincidentibus, cum Anguli NFn, & GFg ſint æquales; & refractiones ad Nn, & Gg ſimiles, emergentes Radii GR, & gr æque paralleli erunt ac incidentes NN, & an.

Quærendus eſt itaque radius AN, cujus refractus cum refracto viciniſſimi radii an concurrit ad F. Et quidem per Corollarium 3. Problematis primi (demiſſis à centro ſphæræ ad radios normalibus CD, & CE: poſitoque $I : R :: CD : CE$.) Si radii iſti ad quodvis punctum Z concurrant, erit $I \times NF : R \times NP$ ($:: NZ : EZ$) $:: NF : EF$ puncto nempe Z ad ipſum F juxta hypotheſin cadente, $:: 2 : 1$. Quare $I \times NF = 2R \times NP$. & $I : 2R :: NP : NF$. Datur itaque ratio NP, ad NF: & inde per Problema 2. dabitur punctum N. Scilicet ad verticem circuli ducatur tangens Bx, cujus quadratum, ſit ad quadratum ſemidiametri BC, ut $4RR - II$, ad $II - RR$. & agatur CX. Hæc enim circulo occurret in N. & ex invento N cætera nullo negotio determinantur.

Corollarium (1.) Hinc fit $3RR : II - RR :: CNq : NDq$. Cum enim ſit $4RR - II : II - RR :: BXq : BCq$. componendo erit $3RR : II - RR$ ($:: CXq : BCq$) $: CNq : NDq$.

Coroll. (2.) Eſt & $I : 2R :: ND : NE$. Nam ſupra fuit $I : 2R :: NP : NF$. Et ex his expeditior evadit Problematis reſolutio.

Scho-

Scholium. Una cum maxima inclinatione radii RG, datur maximus arcuum FQ ad refractos NF terminatorum. Nam angulus FCQ, quem FQ subtendit, est æqualis angulo quem CF & AN comprehendunt: hoc est, æqualis dimidio anguli quem RG, & AN, vel BQ comprehendunt: & proinde arcuum FQ æque ac angulorum ab RG & BQ comprehensorum maximus est, qui radio AN in punctum jam inventum incidente definitur.

Prob. (4.) Sole sphæram pellucidam illustrante radiorum ejus post duas reflexiones emergentium minimam ad axem inclinationem determinare.

Sint AN & an Radii duo incidentes sibi quam proximi, qui post duas reflexiones in Ff, & Gg emergant secundum HS & hs. Et manifestum est quod in eo solo casu ubi acutus angulus, quem BQ & SH comprehendunt, minimus est, radii illi HS & hs possunt esse paralleli; uti supra de radiis GR & gr dictum fuit. Et ubi hoc accidit, radius etiam FG ad fg parallelus erit. Unde arcus Ff duplicatus ($=$ arcui $Ff + Gg =$ arcui $FG - fg =$ arcui $NF - nf$.) $=$ arcui $Nn - Ff$, adeoque arcus Ff triplicatus $=$ arcui Nn. Et cum NF dividatur in Z in ratione istorum arcuum, ut patet, erit $NZ = 3\,ZF$, seu $3\,EZ$. Cum itaque per Corollarium 3. Problematis primi sit $I \times NF : R \times NP :: NZ : EZ$. sive $:: 3 : 1$. erit $I \times NF = 3\,R \times NP$. sive $I : 3\,R :: NP : NF$. datur itaque ratio NP, ad NF: & inde per Problema 2. dabitur punctum N, ducendo nempe BX quæ circulum tangat in vertice B; & cujus quadratum, sit ad BC quadratum, ut $9\,RR - II$, ad $II - RR$: & agendo CX quæ occurret peripheriæ in N. Invento autem N, cætera facile determinantur.

Corollarium (1.) Hinc est $8\,RR : II - RR :: CNq : NDq$. Nam $9\,RR - II : II - RR :: BXq : BCq$. & componendo $8\,RR : II - RR\ (:: CXq : BCq) :: CNq : NDq$.

Coroll. (2.) Est etiam $I : 3R :: ND : NE$. utpote cum supra fuerit $I : 3R :: NP : NF$.

Scholium. Ad eundem modum maxima radii KT post tres reflexiones emergentis inclinatio ad axem, juxta ac maximus arcuum QG investigabitur. Scilicet in in eo casu FG, & fg convenient ad G. eritque arcus Ff ($=$ arcui $Fg - fg$. $=$ arcui $NF - nf$.) $= Nn - Ff$. & inde arcus Ff duplicatus $=$ arcui Nn. & $NZ = 2ZF$. adeoque $4 : 1 :: NZ : EZ ::$ (per Corollarium 3. Problematis primi) $I \times NF : R \times NP ::$ sive $I : 4R :: NP : NF$. Et proinde per Problema secundum $16RR - II : II - RR :: BXq : BCq$. Unde consectatur esse $15RR : II - RR :: CNq : NDq$. Et $I : 4R :: ND : NE$.

Atque ita si radii post quatuor reflexiones emergentis inclinatio minima desideretur, determinabis faciendo ut sit $25RR - II : II - RR :: BXq : BCq$. Vel $24RR : II - RR :: CNq : NDq$. Et $I : 5R :: ND : NE$. Et sic præterea in infinitum.

Scholium. Ex hac Cl. Newtoni limitum in Iride determinatione liceat mihi phænomenon quoddam, sive potius phænomeni absentiam, mihimet quondam satis difficilem & pene insolubilem visum, hic loci solvere. Quare nempe non appareat Iris circa solem ad distantiam graduum quasi 26; ubi nempe radii per refractionem duplicem sine ulla reflexione ad oculos pertingunt? Est enim ex calculo eo loci radiorum constipatio visui afficiendo necessaria & sufficiens. Quin & dubium adauget, quod videtur vero simile prima fronte Iridem hanc omnium maxime insignem, & coloribus maxime intensis ornatam, utpote duplici refractione, sine ulla reflexorum radiorum jactura & imminutione oriundam, visum iri. Sicut enim Iris primaria secundaria est longe insignior, eo quod ex duplici refractione & unica reflexione oriatur; dum secundaria ex duplici refractione, & duplici etiam reflexione pendeat; Sic sane erat expectandum, ut Iris alia, hisce duabus prior & præstantior,

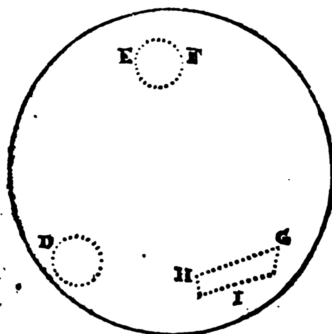
tior, colorum ſplendore tantum primariam noſtram exuperans quantum primaria illa ſecundariam excedere deprehendatur, expectandum erat, inquam, ut hujuſmodi Iris ad gradus quaſi 26. Solem undique cingeret, inſtar coronæ nobiliſſimæ, ubicunque aer tales guttulas ſphæricas haberet, quæ Iridi ſive primariæ ſive ſecundariæ generandæ ſatis eſſent. Et miror ſane, neminem Philoſophorum Iridis naturam explicantium de ſolvendo hoc Phænomeno ſatis obvio ſollicitum fuiſſe. Solutionem itaque hanc Noſtram accipitote. Ideo nos radios circa limites *F* & *G* affatim conſtipatos præ reliquis videmus & colores dignoſcimus, quod eorum plures ut *AN*, *an* parallelos ſphæram pluviam ingreſſis etiam parallelos regrediuntur; ut *RG*, *rg*: *SH*, *sh*: & ita oculum ſimul ingrediuntur: cum è contra niſi parallelos egrederentur, angulum aliqualem conſtituerent, & oculum ſimul ingredi non poſſent, utcunque ad punctum *F* vel *G* ſatis eſſent conferti & conſtipati. Unde cum radii circa punctum *F* egredientes non parallelos egrediantur, ſed angulum aliquem conſtituant, liquet eos oculum ſimul ingredi non poſſe, atque proinde Iridem exhibere non poſſe. *Q. E. S.*

LVI. Fluidi Mathematici homogenii, [hoc eſt, corporis cujus partes cedunt vi cuicunque illatæ, & cedendo facile moventur inter ſe,] quod in vaſe quocunque immoto clauditur, & undique comprimitur, partes omnes (ſepoſita condenſationis, gravitatis, & virium omnium centripetarum conſideratione;) æqualiter premuntur undique; & abſque omni motu à preſſione illa orto permanent in locis ſuis.

CAS. (1.) In vaſe ſphærico claudatur & uniformiter comprimatur fluidum undique. Ejuſdem pars nulla ex illa preſſione movebitur, vel è loco ſuo deturbabitur. Nam ſi pars aliqua *D* moveatur, neceſſe eſt ut omnes ejuſmodi partes ad eandem à centro diſtantiam undique conſiſtentes ſimili motu ſimul moveantur; atque hoc adeo quia ſimilis & æqualis eſt omnium preſſio,

&

& motus omnis exclusus supponitur nisi qui à pressione illa oriatur. Atqui non possunt omnes ad centrum propius accedere, nisi fluidum ad centrum condensetur, contra hypothesin. Non possunt longius ab eo recedere, nisi fluidum ad circumferentiam condensetur, etiam contra hypothesin. Non possunt servata sua à centro distantia moveri in plagam contrariam. In plagas autem contrarias non potest pars eadem eodem tempore moveri. Ergo fluidi pars nulla hoc in casu de loco suo movebitur. *Q. E. D.*



CAS. (2.) Fluidi hujus partes omnes sphæricæ æqualiter premuntur undique. Sit enim *E F* pars sphærica fluidi: & si hæc undique non prematur æqualiter, augeatur pressio minor, usque dum ipsa undique prematur æqualiter; & partes ejus per casum primum [ad hujusmodi sphæram, æquali undique pressione affectam, æque ac in vase rigido contentam pertinentem,] permanebunt in locis suis. Sed ante auctam pressionem permanebant in locis suis per casum eundem primum. [de fluido isto enim hic agitur, cujus partes absque omni motu permanere in locis suis ibi demonstravimus.] & additione pressionis novæ movebuntur de locis suis per definitionem fluidi. Quæ duo repugnant. Ergo falso dicebatur quod sphæra *E F* non undique premebatur æqualiter. *Q. E. D.*

CAS. (3.) Præterea, Diversarum partium sphæricarum pressio erit æqualis. Nam partes sphæricæ se mutuo premunt æqualiter in puncto contactus, propter motus reactionem actioni semper æqualem & contrariam. Sed & per casum secundum partes sphæricæ

quas

quæcunque eadem vi undique premuntur. Partes igitur duæ quævis sphæricæ non contiguæ eadem vi premuntur, quia pars sphærica intermedia tangere potest utramque. *Q.E.D.*

CAS. (4.) Omnes fluidi hujusce partes undique premuntur æqualiter. Nam partes duæ quævis tangi possunt à partibus sphæricis in punctis quibuscunque: & ibi partes illas sphæricas æqualiter premunt, per casum tertium: & propter reactionem actioni ubique æqualem vicissim ab illis æqualiter premuntur. *Q.E.D.*

CAS. (5.) Cum igitur fluidi hujusce pars quælibet *GHI* in fluido reliquo tanquam in vase claudatur, & undique prematur æqualiter; partes autem ejus se mutuo æqualiter premant & quiescant inter se manifestum est quod fluidi cujuscunque *GHI* quod undique premitur æqualiter partes omnes se mutuo premunt æqualiter, & quiescunt inter se. *Q.E.D.*

CAS. (6.) Igitur si fluidum illud in vase non rigido claudatur, & undique non prematur æqualiter, cedet idem pressioni fortiori; per definitionem fluiditatis.

CAS. (7.) Ideoque in vase rigido fluidum non sustinebit pressionem fortiorem ex uno latere quam ex alio: sed eidem cedet: idque in momento temporis, quia latus vasis rigidum non persequitur liquorem cedentem. Cedendo autem urgebit latus oppositum; & sic pressio undique ad æqualitatem verget. Et quoniam fluidum quam primum à parte magis pressa recedere conatur, inhibetur per resistentiam vasis ad latus oppositum, reducetur pressio undique ad æqualitatem in momento temporis, absque motu locali; & subinde partes fluidi per casum quintum se mutuo prement æqualiter, & quiescent inter se. *Q.E.D.*

Corollarium. Hinc motus partium fluidi hujusmodi inter se per pressionem fluido ubivis in externa superficie illatam mutari non possunt, nisi quatenus aut figura superficiei alicubi mutatur, aut omnes fluidi partes intensius vel remissius sese premendo difficilius vel facilius labuntur inter se.

Coroll. (2.) Cum autem fluidi hujusmodi Mathematici definitio & affectiones cum natura & phænomenis fluidorum naturalium maxime congruere videantur, æquum est ut casuum horum demonstrationes fluidis nostris naturalibus, aquæ præsertim, & consimilibus applicentur. Unde liquebit partium fluidi internarum quietem inter se, fluiditatis naturæ nullo modo repugnare: & motum omnem partium fluidorum inter se calori, fermentationi, vel causis aliis extrinsecis acceptum potius esse referendum, quam ipsi fluiditatis naturæ. Si enim partes fluidi sint vel sphæricæ, vel sphæroides, & perfecte politæ; ita ut nunquam inter se connecti possint, sed potius se invicem in punctis physicis solummodo tangant, congeries hujusmodi particularum corpora component qualia nos *Fluida* dicimus; & qualium nos genera plura in rerum natura observamus; etiamsi particulæ ipsæ quiescant. Fluidum ergo ex partibus admodum *mobilibus*, non autem revera necessario *motis* constare videtur.

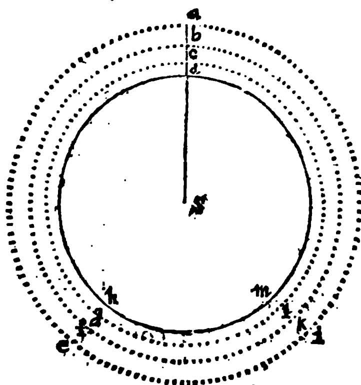
Junii 2°. 1706.

XXVII.

LVII. SI fluidi sphærici, & æqualibus à centro distantiis homogenei, fundo sphærico concentrico incumbentis partes singulæ versus centrum totius gravitent, sustinet fundum pondus Cylindri cujus basis æqualis est superficiei fundi, & altitudo eadem quæ fluidi incumbentis.

Sit *dhm* superficies fundi, & *aei* superficies superior fluidi. Superficiebus sphæricis innumeris *bfk*, *cgl* distinguantur fluidum in Orbes concentricos, æqualiter crassos, & concipe vim gravitatis agere solummodo in superficiem superiorem Orbis cujusque, & *æquales* esse actiones in *æquales partes* superficierum omnium. Premitur ergo superficies suprema *aei* vi simplici

plici gravitatis propriæ, qua & omnes Orbis supremi partes, & superficies secunda *bfk*, (per Prop. 56.) premuntur. Premitur præterea superficies secunda *bfk* vi propriæ gravitatis, quæ vi priori addita facit pressionem duplam. Hac pressione & insuper vi propriæ gravitatis, id est, pressione tripla urgetur superficies tertia, *cgl* Et similiter pressione quadrupla urgetur superficies quarta; quintupla quinta; & sic deinceps.



Pressio igitur qua superficies unaquæque urgetur non est ut quantitas solida fluidi incumbentis, sed ut numerus orbium ad usque summitatem fluidi; & æquatur gravitati Orbis infimi multiplicatæ per numerum orbium, hoc est, gravitati solidi cujus ultima ratio ad Cylindrum præfinitum, (si modo Orbium augeatur numerus, & minuatur crassitudo in infinitum; sic ut actio gravitatis à superficie infima ad supremam continua reddatur, ;) fiet ratio æqualitatis. Sustinet ergo superficies infima pondus Cylindri cujus basis æqualis est superficiei fundi, & altitudo eadem quæ fluidi incumbentis. *Q. E. D.*

Et simili argumentatione patet Propositio, ubi gravitas decrescit in ratione quavis assignata distantiæ à centro; ut & ubi fluidum sursum rarius est, deorsum densius. *Q. E. D.*

Coroll. (1.) Fundum igitur non urgetur à toto fluidi incumbentis pondere; sed eam solummodo ponderis partem sustinet quæ in hac Propositione describitur: pondere reliquo à fluidi figura fornicata sustentato.

Coroll. (2.) Si ſphæra integra ad centrum uſque ex hujuſmodi fluido conſtet, centrum nullum pondus ſuſtinebit; pondere univerſo à fluidi figura fornicata, vel potius in hoc caſu figura ſphærica, ſuſtentato.

Coroll. (3.) In æqualibus autem à centro *diſtantiis* eadem ſemper eſt preſſionis quantitas, ſive ſuperficies preſſa ſit horizonti parallela, vel perpendicularis, vel obliqua: ſive fluidum à ſuperficie preſſa ſurſum continuatum ſurgat perpendiculariter ſecundum lineam rectam, vel ſerpat oblique per tortas cavitates & canales, eaſque regulares vel maxime irregulares, amplas vel anguſtiſſimas. Hiſce circumſtantiis preſſionem nil mutari colligitur applicando demonſtrationem hujus propoſitionis ad caſus ſingulos fluidorum.

Coroll. (4.) Eadem demonſtratione colligitur etiam, (per Propoſitionem priorem 56,) Quod fluidi gravis partes nullum ex preſſione ponderis incumbentis acquirunt motum inter ſe; ſi modo excludatur motus qui ex condenſatione oriatur.

Coroll. (5.) Et propterea ſi aliud ejuſdem gravitatis ſpecificæ corpus, quod nequit condenſari, ſubmergatur in hoc fluido, id ex preſſione ponderis incumbentis nullum acquiret motum; non deſcendet, non aſcendet, non cogetur figuram ſuam mutare. Si ſphæricum eſt, manebit ſphæricum, non obſtante preſſione. Si quadratum eſt, manebit quadratum; idque ſive molle ſit, ſive fluidiſſimum; ſive fluido libere innatet, ſive fundo incumbat. Habet enim fluidi pars quælibet interna rationem corporis ſubmerſi: & par eſt ratio omnium ejuſdem magnitudinis, figuræ, & gravitatis ſpecificæ ſubmerſorum corporum. Si corpus ſubmerſum, ſervato pondere, liqueſceret, & indueret formam fluidi, hoc, ſi prius aſcenderet, vel deſcenderet, vel ex preſſione figuram novam induceret, etiam nunc aſcenderet vel deſcenderet, vel figuram novam induere cogeretur: id adeo quia gravitas ejus, cæteræque motuum cauſæ permanent. Atqui per caſum 5. Prop. prioris, jam quieſceret, & figuram retineret: Ergo & prius.

Coroll. (6.) Proinde Corpus quod ſpecifice gravius eſt quam fluidum ſibi contiguum ſubſidebit; & quod ſpecifice levius eſt aſcendet, motumqne & figuræ mutationem conſequetur, quantum exceſſus ille vel defectus gravitatis efficere poſſit. Nam exceſſus ille vel defectus rationem habet impulſus, quo corpus, alias in æquilibrio cum fluidi partibus conſtitutum, urgetur; & comparari poteſt cum exceſſu vel defectu ponderis in lance alterutra libræ.

Coroll. (7.) Corporum igitur in fluidis conſtitutorum duplex eſt gravitas: altera vera & *abſoluta*; altera apparens, vulgaris, & *comparativa*. Gravitas *abſoluta* eſt vis tota qua corpus deorſum tendit, ſive qua corpus in loco vacuo deſcenderet. Gravitas relativa & vulgaris eſt exceſſus gravitatis qua corpus magis tendit deorſum quam fluidum ambiens. Prioris generis gravitate partes fluidorum & corporum omnium gravitant in locis ſuis, ideoque conjunctis ponderibus componunt pondus totius. Nam totum omne grave eſt, ut in vaſis liquorum plenis experiri licet: & pondus totius æquale eſt ponderibus omnium partium, ideoque ex iiſdem componitur; aliunde enim derivari non poteſt. Alterius generis gravitate, quæ nempe apparens, vulgaris & *comparativa* appellari poteſt, corpora non gravitant in propriis locis, ſeu in fluidis ſuis reſpective immerſa; id eſt, inter ſe collata non *prægravant*, ſed mutuos ad deſcendendum conatus impedientia permanent in locis ſuis, perinde ac ſi gravia non eſſent: uti corpora quævis gravia intra ſphæram concavam poſita ex æqualitate gravitationis undique verſum nullo modo gravitare videntur, uti olim obſervatum. Sic ſane quæ in aere ſunt, & non prægravant, ſive non omnino in aere deſcendunt, uti nubes & vapores, vulgus ſubinde gravia non judicat. Quæ prægravant, ſive in aere deſcendunt, uti grando, & guttæ pluviæ, ea vulgus gravia judicat; quatenus ab aeris pondere non ſuſtinentur. Pondera vulgi nihil aliud ſunt quam exceſſus verorum ponderum ſu-

pra pondus aeris. Unde & vulgo dicuntur levia quæ ſunt minus gravia, aerique prægravanti cedendo ſuperiora petunt. Comparative levia ſunt, non abſolute & vere; quia deſcendunt in vacuo. Sic & in aqua corpora quæ ob majorem vel minorem gravitatem deſcendunt vel aſcendunt ſunt comparative & apparenter gravia vel levia, & eorum gravitas vel levitas comparativa & apparens eſt exceſſus vel defectus quo vera eorum gravitas vel ſuperat gravitatem aquæ, vel ab ea ſuperatur. Quæ vero nec prægravando deſcendunt, nec prægravanti cedendo aſcendunt; etiamſi veris ſuis ponderibus adaugeant pondus totius; comparative tamen & in ſenſu vulgi, [imo & in ſenſu Philoſophorum plerorumque ante ſeculum hodiernum] non gravitant in aqua. Nam ſimilis eſt horum caſuum demonſtratio.

Coroll. (8.) Quæ de gravitate, ſive vi illa centripeta qua gravia terreſtria centrum terræ petunt, in ratione aut abſoluta, aut diſtantiarum reciproca duplicata; obtinere debent in aliis quibuſunque viribus centripetis, & abſolutis, & ſecundum legem quamcunque diſtantiæ auctæ aut diminutæ auctis aut diminutis; ſi modo hujuſmodi leges alicubi reperiantur.

Coroll. (9.) Proinde, ſi medium in quo corpus aliquod movetur urgeatur vel à gravitate propria, vel ab alia quacunque vi centripeta, & corpus ab eadem vi urgeatur fortius, differentia virium eſt vis illa motrix quam in præcedentibus ut vim centripetam conſideravimus. Sin corpus à vi illa urgeatur levius, differentia virium pro vi centrifuga haberi debet.

Coroll. (10.) Cum autem fluida premendo corpora incluſa non mutent eorum figuras externas, patet inſuper per Propoſitionis prioris Corollaria quod non mutabunt ſitum partium internarum inter ſe. Proindeque ſi animalia immergantur, & ſenſatio omnis à motu partium oriatur; nec lædent corpora immerſa, nec ſenſationem ullam excitabunt, niſi quatenus hæc corpora à compreſſione omnifariam undique condenſari poſſunt. Et par

eſt

est ratio cujuscunque corporum systematis, fluido comprimente circumdati. Systematis partes omnes iisdem agitabuntur motibus, ac si in vacuo constituerentur; & solam retinerent gravitatem suam comparativam: nisi quatenus fluidum vel motibus earum resistat, vel ad easdem compressione conglutinandas requiratur.

LVIII. Fluida non descendentia se invicem, & tam immersa corpora, quam continentia, data basi pro ratione altitudinis perpendicularis, non autem pro ratione quantitatis materiæ premunt. Hoc est, pressio cylindri aquæ v. g. altitudinis quadrupedalis, ubi circuli cylindricæ columnæ area est unius tantum pollicis quadrati, æqualis est pressioni cylindri cujusvis aquæ altitudinis quadrupedalis ubi circuli cylindricæ columnæ area est centum vel mille pollicum quadratorum, & sic ubique: nimirum si basis aquea cum aqua in tubo contenta communicans, sit utroque in casu æqualis.

Hæc est notissima hydrostaticæ scientiæ regula, per experimenta sæpius reperta; vixdum autem, uti opinor, physice aut mathematice demonstrata; quam hoc modo demonstrare conabor. Notum est ex primis motuum physicorum elementis quantitatem virium motricium, sive effectuum iisdem respondentium ex materiæ motæ quantitate in velocitatem ducta prorsus oriri: & proinde eandem fore pressionem ex qualibet materiæ prementis quantitate modo ejusdem velocitas sit semper & ubique materiæ quantitati reciproce proportionalis. Notum est etiam staterae, vectis, libræ, & hujusmodi instrumentorum mechanicorum vires ex hujusmodi materiæ & velocitatis combinatione reciproca derivari; & datum pondus à vi seu pressione data quantulacunque moveri posse, si modo machina eo modo ponderi simul & pressioni admoveatur, ut distantiæ ab hypomochlio, & proinde velocitates ponderis & pressionis sint ex necessitate motuum sibi invicem reciproce proportionales. Sic sane unicum pondo ad distantiam quatuor pedum ab hypomochlio tantundem valet ac quatuor pondo ad di-

ſtantiam unius pedis; eo quod ex neceſſitate motuum per vectem vel ſtateram conjunctorum fieri non poteſt quin pondus unicum cum velocitate, velocitatis alterius ponderis quadrupla moveatur: atque adeo æqualem uim & pares effectus ut *inter movendum* habeat eſt neceſſum. *Inter movendum*, inquam, minus æquiponderat ſive æquivalet majori: nec ſane aliter: uti perperam plerique exiſtimare videntur. *Si quando* enim quieſcit machina, palam eſt gravitatem, ſive preſſionem, ſive vim majoris eſſe revera gravitatis, preſſionis, & vis minoris omnino quadruplam; nec ullum in eo caſu æquipondium expectandum. [*Si quando* inquam quieſcat machina. Nam ſi phyſice, aut ſaltem mathematice loquamur, nullum corpus omnino quieſcit, ſed ubi motuum celeritas tantilla eſt, ut à ſenſibus noſtris percipi nequeat, corpora quieſcere dicimus.] Itaque ubi area ſectionis cylindricæ aquæ eſt unius tantum pedis quadrati, deſcendit illa centuplo vel millecuplo velocius, quam ubi area iſta centuplo vel millecuplo major ſupponitur: atque id adeo quod aqua in vaſe contenta & ipſum quoque vas continens in aliquali motu ſemper ſunt poſita, neque unquam abſque omni motu quieſcere queunt. Alias, ut omnino exiſtimo, quieſcens aquæ columna centuplo vel millecuplo major, abſoluta ſua gravitate centuplo vel millecuplo majore prædita, aquam & vas quieſcentia pondere centuplo vel millecuplo premerent. Caſus enim hicce eſt ejuſdem penitus naturæ cum eo ſyphonis inverſi crurum admodum inæqualium; ubi ideo tantum fit æquilibrium, quod velocitates aſcenſus & deſcenſus aquæ in utroque canali ex natura ſyphonis ſint neceſſario quantitati aquæ reciproce proportionales.

Coroll. (1.) Premunt ergo fluida non pro quantitatis materiæ prementis, ſed altitudinum perpendicularium ratione.

Coroll. (2.) Proinde Orbis Ligneus ad fundum fere ſitulæ aqua plenæ demerſus ad ſummum emerget, non

ob-

obſtante quod multo plus aquæ ſupra eundem quam infra reperiatur. Concavus enim ille aquæ cylindrulus cum aqua inferiore ad margines undique communicans eundem æque premit, & lignum æque ſuſtollit, ac ſi omnis ſitulæ aqua eundem premere & ſuſtollere potuiſſet.

Coroll. (3.) Nulla itaque modo opus eſt Principio Cl. Mori Hylarchico ad hoc effectum ſolvendum. Ex Mechanica enim motus lege jamjam demonſtrata aſcenſus orbis lignei neceſſario ſequitur.

Coroll. (4.) Sic ſe habent Fluida *non deſcendentia*; uti in Propoſitione aſſerui. Sin vas, cum fluido, & tubo, ex vi gravitatis omnium communi deſcendat, perit, opinor, preſſionis communicatio, & ceſſat effectus: ita tamen ut etiamnum ſecundum altitudinem æque ac in priori caſu preſſio effectum ſuum ſortiatur: ſive eodem modo premit, ubi maxima eſt aquæ columna, ac ubi minima; ejuſdem nimirum altitudinis; ita ut jam tandem in univerſum aſſerere liceat, Fluida ſecundum altitudines perpendiculares non ſecundum materiæ quantitatem omnino premere.

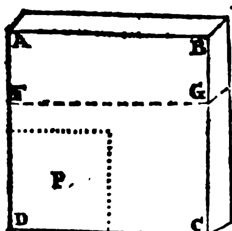
Novemb. 11°. 1706.

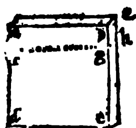
XXVIII.

LIX. SI fluidi ex particulis ſe mutuo fugientibus compoſiti denſitas ſit ut compreſſio, ita ut ubi vires comprimentes duplæ, quadruplæ, vel octuplæ ſunt, denſitates inde oriundæ ſint etiam duplæ, quadruplæ vel octuplæ, & ita in univerſum, Vires centrifugæ particularum ſunt reciproce proportionales diſtantiis centrorum. Et vice verſa, Particulæ viribus quæ ſunt reciproce proportionales diſtantiis centrorum ſuorum ſe mutuo fugientes componunt fluidum elaſticum, cujus denſitas ſit compreſſioni proportionalis.

In-

Includi intelligatur Fluidum in ſpatio cubico *ACE*. dein compreſſione redigi in ſpatium cubicum minus *ace*. Et particularum ſimilem ſitum inter ſe in utroque ſpatio ob naturam fluiditatis obtinentium, diſtantiæ erunt ut Cuborum Latera *AB*, *ab*: & Medii denſitates reciproce ut ſpatia cubica continentia *AB* cub. & *ab* cub. In latere cubi majoris *ABCD* capiatur quadratum *DP*, æquale quadrato cubi minoris *db*. Et ex hypotheſi preſſio qua quadratum *DP* urget fluidum incluſum, (ſive qua fluidum incluſum urget quadratum) erit ad preſſionem qua quadratum illud *db* urget fluidum incluſum, ut Medii denſitates ad invicem; hoc eſt, ut *ab* cub. ad *AB* cub. Sed preſſio qua quadratum *BD* urget fluidum incluſum, eſt ad preſſionem qua quadratum *DP* urget idem fluidum, ut quadratum *DB*, ad quadratum *DP*. hoc eſt, ut *ABq*, ad *abq*. Ergo ex æquo preſſio qua quadratum *DB* urget fluidum, eſt ad preſſionem qua quadratum *db* urget fluidum, ut *ab*, ad *AB*. ſive reciproce ut diſtantiæ particularum. Subtracta enim de ratione triplicata laterum *ab* & *AB*, ratione eorundem duplicata; reſtat ratio ſimplex laterum, ſive diſtantiæ particularum, preſſioni earundem in vas continens (ſive vaſis continentis in particulas) reciproce proportionalis. Exempli gratia: Eſto cubus major cubi minoris octuplus: ſive latus cubi majoris lateris cubi minoris duplum, Tum ſane denſitas fluidi in vaſe minore erit quoque denſitatis in majore octupla, ob eandem materiæ quantitatem in ſpatio octuplo





octuplo minore contentam. Et ex hypothesi quod compressio in datum spatium exercita sit in universum densitati ad amussim proportionalis, erit integra compressio particularum sive vires comprimentes eidem proportionales in cubo minore in ratione octupla compressionis sive virium comprimentium in majore. Sed superficies integra, qua fit compressio, vel superficies quadrati cujusvis in cubo minore, est ad superficiem integram, vel superficiem quadrati cujusvis homologi in cubo majore, in ratione subquadrupla. Est ergo pressio octupla cum pressione altera earundem particularum in spatium quadruplo majus dispersarum comparanda. In spatio itaque quadruplo minore eadem materiæ quantitas, sive eædem fluidi particulæ pressionem octuplam sustinent, necesse itaque est ut quævis particula pressionem duplo quam prius majorem sustineat; sive ut vires centrifugæ particularum sint reciproce proportionales distantiis earundem. *Q.E.D.*

Sic sane, si planis *FGH*, *fgh*, per media cuborum ductis distinguatur fluidum in duas partes: Hæ se mutuo prement iisdem viribus quibus premuntur à planis *AC*, *ac*: hoc est, in proportione *ab*, ad *AB*. adeoque vires centrifugæ, quibus hæ pressiones sustinentur, sunt in eadem ratione. Ob eundem particularum numerum similemque situm in utroque cubo vires quas particulæ omnes secundum plana *FGH*, *fgh* exercent in omnes, sunt ut vires quas singulæ exercent in singulas. Ergo vires quas singulæ exercent in singulas secundum planum *FGH* in cubo majore, sunt ad vires quas singulæ exercent in singulas secundum planum *fgh* in cubo minore, ut *ab*, ad *AB*: hoc est, uti jam demonstravimus, reciproce ut distantiæ particularum ab invicem. *Q.E.D.*

Et vice versa; si vires particularum singularum sint reciproce ut distantiæ particularum, id est, reciproce ut cuborum latera *AB*, *ab*; summæ virium erunt in eadem ratione, & pressiones quadratorum *DB*, *db* ut

summæ

summæ virium; & pressio quadrati *DP*, ad pressionem quadrati *DB*, ut *abq*, ad *ABq*: Et ex æquo, pressio quadrati *DP*, ad pressionem quadrati *db*, ut *ab* cub. ad *AB* cub. Ratione enim simplici, cum ratione duplicata composita emergit ratio triplicata. ita ut vis compressionis in uno, sit ad vim compressionis in altero, ut densitas fluidi ad densitatem, directe. *Q.E.D.*

Coroll. (1.) Cum itaque per experimenta constet aeris nostri per vices compressi & rarefacti densitatem esse viribus comprimentibus, sive compressioni ubique proportionalem; admodum vero simile videtur aerem ex particulis se mutuo in inversa distantiarum ratione fugientibus vel fugantibus constare. Etsi enim hæc vis quasi centrifuga vi universali centripetæ, sive gravitati, è diametro adversa cum eadem consistere non posse videatur; attamen fieri potest ut præter generalem illam gravitatis legem materiam omnem qua materiam attinentem, sine ullo ad ejusdem figuras, formas, circumstantias, aut motus respectu; aliæ sint leges & vires naturales sive attrahendi sive fugandi ad speciales particularum materiæ figuras, formas, circumstantias, aut motus pertinentes, & peculiari modo iisdem alligatæ, è quibus haud pauca è difficilioribus naturæ phænomenis dependere possunt. Sic sane verosimile videtur aeris particulas cum peculiare illud temperamentum, figuram, aut formam acquisiverint, unde tale fluidum elasticum componere aptæ sunt, quale nos Aerem dicimus, novæ huic & speciali legi sive vi centrifugæ, hujusmodi particulas easque solas attinenti immediate subjici. Jure enim suspicatur Autor noster perspicacissimus pleraque specialia naturæ Phænomena ex viribus hujusmodi pendere posse, quibus corporum particulæ, per causas nondum cognitas, vel in se mutuo impelluntur, & secundum figuras regulares cohærent, vel ab invicem fugantur, & recedunt; quibus viribus ignotis Philosophi hactenus Naturam frustra tentarunt: & quibus proinde gradatim jam detectis vel detegendis spes

est

ﬅ non exigua eadem phænomena gradatim patefacienda, & nos ad cauſas ſi non ultimas, proximas tamen, & tam calculo Geometrico quam uſibus humanis accommodatas maxime ſenſim acceſſuros.

Scholium. Intelligenda vero ſunt priora circa vires, æris & hujuſmodi fluidorum centrifugas de hujuſmodi ſolum viribus quæ terminantur in particulis proximis, aut non longe ultra diffunduntur: qualium exempla habemus in corporibus magneticis. Horum virtus attractiva terminatur fere in ſui generis corporibus, ſibi proximis. Magnetis virtus per interpoſitam laminam ferri contrahitur, & in lamina fere terminatur. Nam corpora ulteriora non tam à magnete, quam à lamina trahuntur. Ad eundem modum ſi particulæ fugent alias ſui generis particulas ſibi proximas, in particulas autem remotiores virtutem nullam exerceant, ex hujuſmodi particulis componentur fluida, de quibus actum eſt in hac Propoſitione.

Coroll. (2.) Pari fere ratione præter vim gravitatis univerſalem aliæ eſſe videntur vires attractivæ peculiares particulis quorundam corporum aut peculiares diſtantiis perexiguis aliiſve circumſtantiis corporum particularium, unde phænomena alias miranda conſequi debent. Sic ſane ex hujuſmodi attractione oriri videtur radiorum lucis in corporibus pellucidis aut circa angulos opacorum refractio vel inflexio; utpote quæ ante contactum accidant, & in diſtantia minori fortius attrahunt; uti Auctor noſter in egregio ſuo de Optice tractatu obſervavit. Nec aliunde, uti idem in Latina ejuſdem operis editione notat, oriri videtur ſphærica illa guttularum & argenti vivi & conſimilium fluidorum figura. Particulæ enim ubi ad exiguam diſtantiam collocantur, ſe fortiter attrahunt; atque quo modo ex æquali partium in planetis verſus ſe invicem gravitate, ſphærica planetarum figura neceſſario oritur; eodem etiam ex æquali particularum aquæ vel argenti vivi ſibi mutuo admodum approximantium vi centripeta

æquum

æquum est ut guttularum figuram sphæricam derivemus: præsertim dum hasce particulas quam citissime & quam accuratissime in sphærulas istas coire videmus; uti ex notissimis Iridis phænomenis, instantaneæ earundem & accuratissimæ in sphærulas conformationi in solidum debitis, facile discere licebit.. Neque ex diversa causa forsan nonnulla alia fluidorum phænomena, solutu alias difficillima, pendere sunt censenda. Sed hæc Obiter. Ad seriem incæptam jam revertor.

LX. Quantitas materiæ in corporibus universis eorum ponderi est accuratissime proportionalis.

Sublata enim aeris resistentia, uti fit in vacuo Boyliano, omnia corpora, sive solidissima, & gravissima; sive rarissima, & levissima videantur, communi & data quadam velocitate simul descendunt, ubi simul ab eadem altitudine demittuntur. Corpora etiam pendula quæcunque, quorum centra oscillationis à suspensionis centro æqualiter distant, etiam in aere, si arcum ejusdem vel æqualis cycloidis æqualem, vel etiam inæqualem simul oscillari incipiant, eunt simul redeuntque diutissime: & ubi arcus æqualis describitur, eadem omnino celeritate moventur, sive dura sint, sive mollia; sive solida sint, sive liquida; sive magna sint, sive parva; cujuscunque demum formæ sint, vel figuræ. Unde constat vim moventem esse ubique in eadem ratione cum materia movenda: sive vim gravitatis corpora omnia æqualiter afficere: in eadem nempe à telluris centro distantia. Nam quod magna corpora cæteris paribus in aere paulo velocius descendunt, motusque suos paulo diutius conservant, inde est, quod *superficies* corporum, secundum quam fit aeris vel medii cujusvis resistentia in corporibus similibus sit tantum in diametrorum vel laterum similium ratione duplicata: cum eorundem *soliditas*, secundum quam æstimanda est & materiæ quantitas, & vis gravitatis, sit in diametrorum vel laterum eorundem ratione triplicata. Sic si diameter sphæræ cujusvis lapideæ sit alterius sphæræ ex

eadem

eadem materia tripla; erit ejusdem superficies, & per consequens, data velocitate, ejusdem resistentia in aere, alterius tantum noncupla, ubi soliditas, & materiæ quantitas, eique proportionalis ejusdem gravitas sit alterius plane vigecupla septupla. Unde mirum non est, resistentiam pro ratione gravitatis in sphæra majore tanto minorem, eandem sphæram in ratione minore afficere & retardare, quam sphæram minorem afficit & retardat. Quod vero tanta sit ponderis in aere v. g. inter aurum & paleam apparens velocitatis descensus differentia, illa non solum à superficierum sed præcipue à gravitatis specificæ differentia qua aurum longe magis quam palea exuperat aeris ipsius gravitatem dependet: excessus autem gravitatis specificæ corporis in aere descendentis supra gravitatem ipsius aeris specificam ea sola est gravitas quæ corpus in aere positum ad descendendum cogit, uti nuperrime ostendimus. Unde mirum non est, quod aurum longe quam palea velocius in aere descendat, licet in vacuo utraque pari semper velocitate descendere observentur.

Scholium. Si ipsa velocitas corporum omnium in vacuo apud telluris superficiem in notis mensuris requiratur, Sciendum, tam per corporum perpendiculariter descendentium observationem directam, quam per pendulorum corporum oscillationes & calculum inde initum à Cl. Hugenio, consentientibus Geometris, illam ea quantitate statui qua scrupulo horario secundo corpora per pedes Parisienses $15\frac{1}{12}$. sive pedes Anglicos $16\frac{1}{12}$. hoc est, pedes sedecim & pollicem quasi unum descendunt: aut qua horæ spatio per pedes Anglicos 208.656.000. hoc est, milliariorum Anglicorum fere quadraginta millia descenderent: uti ex eodem calculo corporum in duplicata temporis ratione descendentium illico constare poterit.

LXI. Corporum fune pendulorum quibus resistitur in ipsa solum velocitatis ratione, oscillationes in Cycloide, sive arcus descripti sint majores sive minores, sunt ubique Isochronæ. Quod

Quod vera ſit propoſitio in loco vacuo, ubi nulla eſt medii reſiſtentia, olim demonſtravimus. Et ſi reſiſtentia ſit ut velocitas, ſive ut arcus ubique deſcribendus, velocitas reliqua erit quoque in eadem ratione: & proinde oſcillandi tempus æqualiter retardabitur utrinque, & oſcillationes etiamnum manebunt inter ſe, ut prius, Iſochronæ. *Q. E. D.*

Coroll. Media itaque reſiſtentia tempus oſcillandi majus requirunt quam vacuum ſpatium: & horologia oſcillatoria citius aliquantulum vibrationes ſuas æquales in vacuo quam in aere peragunt, conſentiente experientia. Reſiſtentia enim aufert nonnullam gravitatis motricis partem; & proinde effectum ejus ſive motus velocitatem ſufflaminat.

Nov. 25. 1706.

XXIX.

LXII. **C**ORPORIBUS inæquali velocitate in fluido ſubtiliſſimo motis reſiſtitur à fludio in duplicata velocitatis ratione.

Cum enim Corpus velocius motum & majori medii quantitati in ratione velocitatis, & cuique medii parti æquali, cum impetu majori in eadem velocitatis ratione occurrat, reſiſtentia tota ex cauſa utraque conjuncta oriunda neceſſario erit in ejuſdem velocitatis ratione duplicata. Cui quidem rationi duplicatæ experimenta non male conſentiunt. Licet partium in aere cedentium lubricitatis defectus ab elaſticitate ortus, & nonnulla plurimorum fluidorum partium cohæſio iſtam rationem aliquantulum turbare debeant.

Coroll. (1.) Cum itaque corporum fune pendulorum in Cycloide, ubi reſiſtentia eſſet in ſimplici velocitatis ratione oſcillationes eſſent Iſochronæ, Reſiſtentia autem

rem in aere & hujusmodi mediis sit fere in velocitatis ratione duplicata, Liquet oscillationum tempora etiam in Cycloide, & multo etiam magis in Circulo, per aerem non esse in diversis arcubus penitus æqualia; sed in majoribus, ob resistentiam nimiam, paulo majora.

Coroll. (2.) Hinc sequitur ad æqualitatem temporum in horologiis oscillatoriis optime obtinendam opus esse, ut pendula eosdem arcus semper describant: alias ob inæqualem velocitatem, ubi arcus majores describitur, tardius; ubi minores, celerius justo fiet motus. Unde etiam causa ostendi potest, præter automatorum structuram minus perfectam, quare Horologia majora in navi collocata & huc illuc jactata non adeo accurate ac domi manentia & in quiete posita horas demonstrant. Ob concussionem enim frequentem arcus nunc majores, nunc minores describuntur: & inde temporis inæqualitas nonnulla necessario consequitur.

Coroll. (3.) Oscillationes breviores sive in Cycloide sive in Circulo sunt magis isochronæ quam longiores; ob minorem nempe medii perturbantis resistentiam: & brevissimæ iisdem temporibus peraguntur ac in medio non resistente quam proxime: ubi etiam Cyclois & Circulus plane coincidunt, sive se mutuo tangunt: & oscillationes in circulo vix differunt ab iis quæ fiunt in cycloide. Unde etiam horologia oscillatoria quæ pendulo longiore gubernantur accuratius multo horas indicant quam ea quæ breviori alligantur; propterea quod arcus longe minores ab iis describuntur. Earum vero oscillationum quæ in majoribus arcubus fiunt tempora sunt paulo majora, eo quod resistentia corporis, qua tempus producitur, major sit pro ratione longitudinis in descensu descriptæ, (ob majorem nempe velocitatem,) quam resistentia in ascensu subsequenti, qua tempus contrahitur. Sed & tempus oscillationum, tam brevium, quam longarum nonnihil produci videtur per motum medii. Nam Corporibus tardescentibus paulo minus resistitur pro ratione velocitatis, & corporibus accele-

ratis paulo magis quam iis quæ uniformiter progrediuntur: id adeo quia medium eo quem à corporibus accepit motu in eandem plagam pergendo in priore casu magis agitatur, in posteriore minus, ac proinde magis vel minus cum corporibus motis conspirat. Pendulis igitur in descensu magis resistit, in ascensu minus, quam pro ratione velocitatis duplicata; & ex utraque causa tempus producitur.

LXIII. Velocitas prima fluidi cujusque subtilissimi per foramen effluentis ea est quam corpora acquirerent descendendo ab altitudine altitudinis ejusdem supra foramen perpendicularis dimidia: & est ubique ad diversas altitudines in subduplicata earundem altitudinum ratione.

Si vas impleatur aqua, & in fundo perforetur, ut aqua per foramen defluat, manifestum est quod vas sustinebit pondus aquæ totius dempto pondere partis istius quod foramini perpendiculariter imminet. Nam si foramen obstaculo aliquo occluderetur, obstaculum sustineret pondus aquæ sibi perpendiculariter incumbentis, & fundum vasis sustineret pondus aquæ reliquæ. Sublato autem obstaculo fundum vasis eadem aquæ pressione, eodemque ipsius pondere urgebitur ac prius; & pondus quod obstaculum sustinebat, cum jam non sustineatur, faciet ut aqua descendat & per formam defluat. Unde consequens est quod motus aquæ totius effluentis is erit quem pondus aquæ foramini perpendiculariter incumbentis generare possit. Nam aquæ particula unaquæque pondere suo, quatenus non impeditur, descendit; idque motu uniformiter accelerato; & quatenus impeditur urgebit obstaculum. Obstaculum illud vel vasis est fundum, vel aqua inferior jamjam effluxura; & propterea ponderis pars illa quam vasis fundum non sustinet, urgebit aquam defluentem, & motum sibi proportionalem generabit. Et cum vis integra premens nil aliud sit quam vis gravitatis propria cujusque particulæ, vel supremæ superficiei fluidi superaddita vi propriæ cujusque inferioris particulæ, vel quarumcunque inferiorum superficierum æqualium per

totam

totam altitudinem perpendicularum æqualiter gravitantium; sive velocitas genita summa velocitatum singularum superficierum, vel velocitas corporum à quiete descendentium æquabiliter aucta: Et cum etiam velocitas Corporis à dimidia altitudine descendentis sit ea quacum integra altitudo eodem tempore motu uniformi describi deberet, & ab eodem gravitatis propriæ exordio incipiens æquabiliter aucta: Liquet eandem velocitatem utrobique generari. Quia vero velocitates corporum descendentium sunt ubique in subduplicata ratione altitudinum, Erunt & velocitates effluentium, iisdem æquales, in eadem ratione subduplicata. *Q.E.D.*

Coroll. (1.) Quantitas itaque aquæ effluentis quo tempore corpus cadendo describere posset altitudinem dimidiam, æqualis erit columnæ aquæ totius foramini perpendiculariter imminentis.

Coroll. (2.) Cum autem aqua effluens motu suo primo sursum verso perpendiculariter surgeret ad dimidiam altitudinem aquæ foramini incumbentis, consequens est quod si egrediatur oblique per canalem in latus vasis, describere incipiet in spatiis non resistentibus Parabolam, cujus latus rectum ad verticem ubi incipit curvatura, vel desinit canalis, pertinens, est dupla altitudo aquæ in vase supra canalis orificium; & cujus diameter horizonti perpendicularis ab orificio illo ducitur: atque ordinatim applicatæ parallelæ sunt tangenti per canalis axem ductæ.

Coroll. (3.) Data ergo parabola ab aqua effluente descripta, datur una aquæ in vase contentæ altitudo supra foramen perpendicularis; nempe lateris recti ad verticem egressus pertinentis dimidia.

Coroll. (4.) Si aqua per canalem horizonti parallelum egrediatur, quoniam fundum vasis integrum est, & eadem aquæ incumbentis pressione ubique urgetur, ac si aqua non efflueret; vas sustinebit pondus aquæ totius, non obstante effluxu: Sed latus vasis, de quo effluit, non sustinebit pressionem illam omnem quam sustineret si aqua non efflueret. Tolletur enim pressio partis il-

lius ubi perforatur, quæ quidem pressio, ob naturam aquæ fluidam, æqualis est ponderi columnæ aquæ cujus basis foramini æquatur, & altitudo eadem est quæ aquæ totius supra foramen. Et Propterea, si vas ad modum corporis penduli filo prælongo à clavo suspendatur, hoc si aqua in plagam quamvis secundum lineam horizontalem effluat, recedet semper à perpendiculo in plagam contrariam. Et par est ratio, ut hoc obiter notetur, motus pilarum quæ pulvere tormentario madefacto implentur, & materia in flammam per foramen paulatim expirante recedunt à regione flammæ, & in partem contrariam cum impetu feruntur.

Coroll. (5.) Eadem est velocitas exeuntis fluidi in aqua, & in aere, & aliis quibuscunque, modo subtilissima sint, ubi altitudo perpendicularis est eadem, uti ex præcedente demonstratione liquet.

Coroll. (6.) Et si fluidum sit elasticum, & Undulationes sive tremores suos ad distans propagare possit, Undulationes vel Tremores istos eadem velocitate propagabit qua primo efflueret ex altitudine Fluidi Uniformis, cujus pondus fluidum subjectum comprimere posset. Tensio enim sive elaterium isti pressioni sive velocitati incipienti proportionale est ipsum undulationis vel tremoris vehiculum: & proinde undulationes vel tremores istos cum velocitate propria non potest non transferre & propagare.

Coroll. (7.) Unde cum pondera specifica aquæ pluvialis & Argenti vivi sint ad invicem ut 1 ad 14. circiter; & ubi Mercurius in Barometro altitudinem attingit digitorum Anglicorum 30. pondus elastici Aeris & aquæ pluvialis sint ad invicem, ex collatis plurimis observatis, ut 1 ad 1000 circiter; erunt pondera specifica aeris & argenti vivi ut 1 ad 14000 circiter. Proinde, cum altitudo argenti vivi sit 30 digitorum, altitudo aeris uniformis cujus pondus aerem nostrum subjectum comprimere posset, erit 42000 digitorum, seu pedum Anglicorum 35000. Corpora autem pedes

17500;

17500; hoc eſt, altitudinem prioris dimidiam; ſpatio 33 quaſi minutorum ſecundorum in vacuo deſcendunt. Unde Undulationes vel Tremores aeris iſti, quos ſonorum vehicula ſtatuimus, ea ſe propagabunt velocitate ut ſpatio 33 ſcrupulorum ſecundorum pedes Anglicos 35000 circiter conficiant, & ex æquabili propagationis tenore ſcrupulo ſecundo unico 1060 pedes circiter; ſive ſcrupulo primo integro 63640 circiter: quæ quidem Sonorum velocitas cum experimentis probe congruit. Scribit enim Merſennus in Baliſticæ ſuæ *Prop.* 35. ſe factis Experimentis inveniſſe quod ſonus minutis quinque ſecundis hexapedas Gallicas 1150, (id eſt pedes Gallicos 6900) percurrat. Unde cum pes Gallicus, ſit ad Anglicum, ut 1068, ad 1000; debebit ſonus tempore minuti unius ſecundi pedes Anglicos 1474 conficere. Scribit etiam idem Merſennus Robervallum Geometram Clariſſimum in Obſidione Theodonis obſervaſſe Tormentorum fragorem exauditum eſſe poſt 13 vel 14 ab igne viſo minuta ſecunda; cum tamen vix dimidiam Leucam ab illis Tormentis abfuerit. Continet Leuca Gallica hexapedas 2500; adeoque ſonus tempore 13 vel 14. ſecundorum ex obſervatione Robervalli confecit pedes Pariſienſes 7500, ac tempore unius ſecundi pedes Pariſienſes 560, Anglicos vero 600 circiter. Multum differunt hæ obſervationes ab invicem; & computus noſter medium locum tenet. In Porticu Collegii SS. Trinitatis apud nos pedes 208 longa, ſonus ex ipſius Newtoni obſervatis in termino alterutro excitatus quaterno recurſu Echo quadruplicem efficit, & ſingulis ſoni recurſibus pendulum quaſi ſex vel ſeptem digitorum longitudinis oſcillabatur; ad priorem ſoni recurſum eundo, & ad poſteriorem redeundo. Longitudo penduli ſatis accurate definiri non potuit: ſed longitudine quatuor digitorum oſcillationes nimis celeres, ea novem digitorum nimis tardæ videbantur. Unde ſonus eundo & redeundo confecit pedes 416 minore tempore quam pendulum digitorum

novem, & majore quam pendulum digitorum quatuor oscillatur; id est, minore tempore quam $28\frac{1}{4}$ minutorum tertiorum; & majore quam $19\frac{1}{8}$. & propterea tempore minuti unius secundi conficit pedes Anglicos plures quam 866, & pauciores quam 1272; atque adeo velocior est quam pro observatione Robervalli, ac tardior quam pro observatione Mersenni. Quin etiam accuratioribus postea observationibus definivit Newtonus quod longitudo penduli major esse deberet quam digitorum quinque cum semisse, & minor quam digitorum octo; adeoque quod sonus tempore minuti unius secundi confecit pedes Anglicos plures quam 920, & pauciores quam 1085. Igitur motus sonorum secundum calculum geometricum superius allatum inter hos limites consistens, & ad numerum majorem accedens propius, sicut pleraque aliorum experimenta persuadent, optime cum Phænomenis quadrat.

Coroll. (8.) Si densitas aeris augeatur aut minuatur, sonus ipse sive fragoris violentia in eadem ratione augebitur aut minuetur; quod cum experimentis sonorum in aere rarefacto & condensato factis probe congruit.

Coroll. (9.) Unde sequitur, sonos in altissimorum montium cacuminibus, ubi aer rarior est, minores esse, & tardiores, quam in vallibus.

Coroll. (10.) Si Ventus cum motu aeris conspiret, sonitus, vel fragor, sive pulsuum violentia augebitur, & longius perget; utpote ex *summa* motuum ipsius soni & venti conflata. Si Ventus eidem motui repugnet, sonitus minuetur, & citius sistetur; utpote ex *differentia* motuum eorundem solummodo oriundus. Salva semper ipsius soni propagati velocitate superius designata. Sonus enim non ex motu aeris continuo, sed ex pulsibus ejusdem undarum more per vibrationes sive itus reditusque vicibus alternis se invicem sequentes propagatis dependet; uti statim ostendetur. Et qualiscunque sit fragoris differentia, à differenti corporis sonori vel venti statu orta, manent tamen aeris densitas & elaterium;

terium; & inde manebit quoque eorum effectus, sive sonorum propagatorum velocitas.

Coroll. (11.) Eadem itaque fere velocitate Soni qualescunque, sive magni sint, sive parvi, per aerem densitate datum propagantur: Uti ostendunt quoque ea de re experimenta à Philosophis capta.

Coroll. (12.) Data itaque jam sonorum ubicunque locorum velocitate, ea nempe qua 1060 pedes Anglicos scrupulo secundo conficiunt, Ex dato sonorum temporis intervallo datur una distantiæ corporis sonori intervallum. Sic sane si inter Bombardæ ignem visum, auditumque sonum decem minuta secunda pertransire observemus; liquet bombardam à nobis 10600 pedes, sive mille passus duos circiter distare. Pariter si inter fulgur visum & tonitru auditum intercedant minuta secunda quinque; liquet nubes istas unde erumpunt à spectatore 5300 pedes, sive quasi millepassum unicum distare.

Scholium. Notandum autem hic loci, me velocitatem sonorum paulo quam ipse Auctor majorem ponere; utpote quæ, ut opinor, tum calculo geometrico, tum experimentis plerisque accuratius congruit.

Decemb. 2°. 1706.

XXX.

LXIV. RESISTENTIA Fluidorum ut in diversis velocitatibus est in ratione duplicata velocitatis; ita in diversis densitatibus data velocitate in ipsa densitatis ratione directa: datis autem densitate & velocitate in diametrorum ratione duplicata: atque adeo in universum Resistentia est in ratione composita ex duplicata ratione velocitatis; ex duplicata ratione diametrorum; & ex simplici ratione densitatis medii directe.

Facilia hæc ſunt, nec demonſtratione indigent. Si enim ſphæræ duæ quoad diametros altera alteram in ratione dupla excidat, ſive ſit ut 2 ad 1 : & moveatur major velocitate alterius dupla; & in medio fluido alterius denſitate duplo; palam eſt, dato quovis temporis ſpatio, univerſam ſphæræ majoris reſiſtentiam, ſive motum amiſſum, eſſe ad univerſam ſphæræ reſiſtentiam, ſive motum amiſſum, ut 2 × 2 × 2 × 2 × 2, ad 1 × 1 × 1 × 1 × 1, ſive, ut 32 ad 1. atque ita ubique. Notandum tantum corporum reſiſtentiam à fluidis & à ſolidis cæteris paribus æqualiter oriri; niſi quatenus in motibus tardioribus medium fluidiſſimum, impetu per circulum in poſticam projectorum vel motorum corporum partem facto, aliquantulum ea iterum promovere poſſit: quod in velocioribus minus fieri debet, & in longe velociſſimis neutiquam: uti quoque per experimenta accuratiſſime inſtituta Auctor noſter Celeberrimus rem ſe habere deprehendit.

Coroll. (1.) Media itaque in quibus corpora projectilia ſine ſenſibili motus diminutione longiſſime proprogrediuntur, non ſolum fluidiſſima ſunt, ſed etiam longe rariora quam ſunt corpora illa quæ in ipſis moventur: alias projectorum motum cito ſiſterent, & ad quietem reducerent.

Coroll. (2.) Unde ſequitur aerem noſtrum, ſive omnem materiam in aere contentam parvam eſſe, ſi cum materia in corporibus per eandem longiſſime & velociſſime progredientibus componatur; tantumque à Pleno Carteſiano abeſſe, ut ne millecuplam ſpatii integri continentis partem revera occupet.

Coroll. (3.) Unde etiam ſequitur, ætherem, ſive materiam omnem in ſpatiis planetariis contentam, per quam Planetæ tot millenniis tanta cum velocitate revolverunt, idque ſine omni fere motus jactura, perexiguam ſane eſſe, ſi cum materia in ipſis planetis contenta comparetur: ita ut, quod inſtituto calculo facile patebit, ſpa-

tium potius revera vacuum, quam ætheream aliquam materiam nuncupare præstiterit.

Coroll. (4.) Corruit ergo in universum Philosophia Cartesiana, materiæ cuidam cælesti, quam materiam tum *primi* tum *secundi elementi* appellat, in solidum inædificata. Neque explosa jam per experimenta atque demonstrata Newtoniana materia hac subtili, Hypotheseos Cartesianæ basi & fundamento, ultra subsistere figmentum istud ingeniosum ullo modo potest. Præsertim cum non solum plenitudinem materiæ istius subtilis sustulerit Newtonus, sed & nihil omnino hujusmodi materiæ Corporum poris inesse ostenderit. Per experimentum enim penduli prælongi in aere diutius oscillantis & motum inde amissum cum aeris resistentia in superficiem facta collatum æstimando, invenit, aut nullam omnino, aut plane insensibilem resistentiam in partibus internis oriri. Unde recte concludendum, nullam omnino, aut plane insensibilem esse in poris corporum materiæ cujusvis subtilis quantitatem: cum è contra ex Cartesii plenitudine, cum specifica penduli gravitate collata, debuerit esse quam ipsa penduli substantia longe major. Omnino contra experientiam.

LXV. Pressio quævis rectilinearis per fluidum secundum lineas rectas solas propagari nequit.

Cum enim fluidum sit ea natura ut aut ejus partes sint semper in motu omnifariam, aut saltem facillime omnifariam mobiles, & data quavis occasione revera motæ; atque adeo particulæ situ & loco admodum variæ & obliquæ quoad se invicem semper existant; fieri non potest quin pressio quævis etiam per rectam lineam primitus communicata particulas oblique positas plerumque urgeat; & illæ oblique positæ alias oblique etiam positas pariter urgeant; & sic deinceps in infinitum. Pressio igitur quamprimum propagatur ad particulas quæ non accurate in directum jacent, divaricare incipiet, & oblique propagabitur in infinitum: & postquam incepit oblique propagari, quotiescunque incide-

rit

rit in particulas ulteriores quæ non in directum jacent, hoc est, fere semper, iterum divaricabit. Sic etiam si pressionis à dato loco per fluidum propagatæ pars aliqua obstaculo intercipiatur, pars reliqua quæ non intercipitur pariter ac prius divaricabit in spatia quævis ultra obstaculum.

Coroll. (1.) Hinc ratio redditur, quare Soni vel muris interpositis, vel in cubiculum per fenestram admissi, sese in omnes cubiculi partes dilatent; inque angulis omnibus audiantur, non solum reflexi quidem à parietibus oppositis, sed & à fenestra per aerem undique propagati.

Coroll. (2.) Lucis radii qui per ætherem, & aerem, & aquam aliaque fluida per rectas lineas semper propagantur, non sunt pulsus quidam per fluida ista, sonorum instar, propagati; sed particulæ seu corpuscula realia à Sole & stellis emanantia, & per pellucida media quæcunque vero motu propagata; ut etiam alia pleraque lucis phænomena omnino suadent.

LXVI. Corpus omne Tremulum in medio elastico propagabit motum pulsuum undique in directum: In medio vero non elastico motum per circulum excitabit.

CASUS (1.) Nam partes corporis tremuli vicibus alternis eundo & redeundo itu suo urgebunt & propellent partes Medii sibi proximas, & urgendo comprimient easdem & condensabunt: dein reditu suo finent partes compressas recedere, & sese expandere. Igitur partes medii corpori tremulo proximæ ibunt & redibunt per vices ad instar partium corporis illius tremuli: & qua ratione partes corporis hujus agitabant hasce medii partes, hæ similibus tremoribus agitatæ agitabunt partes sibi proximas, eæque similiter agitatæ agitabunt ulteriores: & sic deinceps in infinitum. Et quemadmodum medii partes primæ eundo condensantur & redeundo relaxantur, sic partes reliquæ quoties eunt condensabuntur, & quoties redeunt sese expandent. Et

prop-

ropterea non omnes simul ibunt, & simul redibunt; (sic enim datas ab invicem distantias servando, non rarefierent & condensarentur per vices;) sed accedendo ad invicem, ubi condensantur; & recedendo, ubi rarefiunt, aliquæ earum ibunt, dum aliæ redeunt; idque vicibus alternis in infinitum. Partes autem euntes, & eundo condensatæ ob motum suum progressivum quo feriunt obstacula, sunt pulsus: & propterea pulsus successivi à corpore omni tremulo per fluidum elasticum propagabuntur: idque æqualibus circiter ab invicem distantiis, ob æqualia temporis intervalla, quibus corpus tremoribus singulis singulos pulsus excitat. *Q.E.D.*

Corollarium. Quanquam corporis tremuli partes eant & redeant secundum plagam aliquam certam & determinatam, tamen pulsus inde per medium fluidum propagati sese dilatabunt ad latera, per Propositionem præcedentem; & à corpore illo tremulo, tanquam centro communi, secundum superficies propemodum sphæricas & concentricas undique propagabuntur. Cujus etiam rei aliquod exemplum habemus in Undis: quæ si digito tremulo excitentur, non solum pergent hinc inde secundum plagas motus digiti, sed in modum circulorum concentricorum digitum statim cingent, & undique propagabuntur. Nam Undarum gravitas supplet quodammodo locum vis elasticæ.

Coroll. (2.) Hinc colligi potest, quod numerus pulsuum propagatorum idem sit cum numero vibrationum corporis tremuli, neque multiplicetur in eorum progressu. Lineola enim quævis physica quamprimum ad locum suum primum semel rarescendo redierit, quiescet; neque deinceps movebitur, nisi vel ab impetu corporis tremuli, vel ab impetu pulsuum, qui à corpore tremulo propagantur, novo motu cieatur. Quiescet igitur quamprimum pulsus à corpore tremulo propagari desinunt.

Coroll. (3.) Unde facile innotescit causa, cur Soni, cessante motu corporis sonori, statim cessant; neque diu-

diutius audiuntur ubi longissime distamus, quam cum proxime absumus. Cessante enim Causa, Cessare effectum est Necesse.

Coroll. (4.) Hinc etiam causa intelligi potest, cur Soni in Tubis stenterophonicis valde augeantur. Motus enim omnis reciprocus singulis recursibus à causa generante augeri solet. Motus autem in Tubis, dilatationem sonorum impedientibus, tardius amittitur, & fortius recurrit; & propterea à motu novo singulis recursibus impresso magis augetur. Et cum omnis ille corporis aut vocis sonoræ impetus, qui alias ad sphæram usque integram, cujus radius esset tubi longitudo, eodem tempore propagari debuisset, nunc intra tubi spatiũ concavum concludatur, & ex ejusdem apertura junctis viribus exeat, obscurum esse non potest, tremulum aeris motum, sive pulsuum sonorum violentiam longe exinde augeri, & ita ad intervalla longe majora pervenire debere: ita tamen ubique, ut propagationis velocitas eadem etiamnum ac prius atque invariata permaneat. Ea autem, ut opinor, ratione sonus augetur in hisce tubis, ut omnem fere ejusdem quantitatem, quæ alias dato tempore superficiem sphæricam cujus radius sit tubi longitudo, occuparet intra aperturam tubi coarctetur. Id est, in ratione superficiei sphæricæ integræ, ad ejusdem partem intra tubi aperturam contentam quam proxime. Operæ autem pretium videtur ut adhibeantur experimenta huc spectantia, quo determinetur tandem, num sonorum per hosce tubos augmentum rationem jam definitam obtineat, necne: ut de iisdem in posterum certius pronunciare, eosdemque utilius tractare atque usibus humanis adhibere valeamus.

Cas. (2.) Quod si medium non sit elasticum; quoniam ejus partes à corporis tremuli partibus vibratis pressæ condensari nequeunt, propagabitur motus in instanti ad partes ubi medium facillime cedit: hoc est, ad partes quas corpus tremulum alioqui vacuum à tergo relinqueret. Idem est casus cum casu corporis in medio

quo-

quocunque projecti. Medium cedendo projectilibus non recedit in infinitum, sed in circulum eundo pergit ad spatia quæ corpus relinquit à tergo. Igitur quoties corpus tremulum pergit in partem quamcunque, Medium cedendo perget per circulum ad partes quas corpus relinquit; & quoties corpus regreditur ad locum priorem, medium inde repelletur, & ad locum suum priorem redibit.

Corollarium. Hallucinantur igitur Cartesiani, qui credunt agitationem partium flammæ sive Solis ad pressionem seu lucis propagationem per medium ambiens secundum lineas rectas conducere. Debebit ejusmodi pressio non ab agitatione sola partium flammæ, vel Solis, sed à totius dilatatione derivari. Atque hæc impræsentiarum sufficiant. Reliqua Termino post Natalitia proximo expectabitis.

Decemb. 9°. 1706.

XXXI.

LXVII. SI Cylindrus solidus infinite longus in fluido uniformi & infinito circa axem suum positione datum uniformi cum motu revolvatur, & ab hujus impulsu solo agatur fluidum in orbem; perserveret autem fluidi pars unaquæque uniformiter in motu suo; Tempora periodica partium fluidi erunt ut ipsarum distantiæ ab axe cylindri directe; & velocitates ubique æquales.

Distinguatur enim fluidum in orbes solidos cylindricos innumeros cylindro concentricos, ejusdem ubique crassitudinis. Et quoniam fluidum supponitur esse homogeneum, & Cylindrus motu suo circulari conatur omnes fluidi partes contiguas, & per partes contiguas partes ulteriores in infinitum communi suo motu angu-

lari,

lari, atque adeo velocitate in ratione distantiæ directa concitare, & secum eodem tempore periodico circumvolvere; Liquet orbes quoscunque tum demum cessare ab ulteriori acceleratione, & partes perseverare in motibus suis uniformiter, ubi resistentia sive impressio in partem concavam, æquetur resistentiæ vel impressioni in partem convexam; (alias enim prævalente vi fortiori motus ex ista parte mutabitur.) Proinde, ubi velocitas respectiva, secundum quam in data superficie orietur resistentia, fuerit in ipsa superficiei ratione reciproca, Impressiones ex parte utraque sibi invicem erunt æquales: Id est, in hoc casu ubi velocitas angularis sit in ipsa distantiæ ratione reciproca, sive ubi velocitas absoluta sit semper æqualis, & tempora periodica in ipsa distantiæ ratione directa. *Q. E. D.*

Coroll. (1.) Si fluidum non sit infinitum, sed in vase cylindrico contineatur, circumagetur etiam cylindrus exterior, & accelerabitur ejus motus quoad usque tempora periodica cylindri utriusque & fluidi inclusi æquentur inter se. Quod si cylindrus exterior violenter detineatur, conabitur is motum fluidi retardare; & nisi cylindrus interior vi aliqua continuo impressa motum suum conservet, efficiet ut idem paulatim cesset.

Coroll. (2.) Cum autem Planetarum tempora periodica non sint in ratione ipsa distantiarum à Sole, sed in ejusdem sesquialtera; atque proinde velocitates absolutæ non sint ubique æquales, sed in subduplicata distantiarum ratione; uti apud omnes Astronomos est in confesso; Liquet hujusmodi fluidi ætherei constitutionem systemati Solari minime convenire; nec ex eadem supposita quicquam auxilii vorticibus Cartesianis accedere.

LXVIII. Si sphæra solida in fluido uniformi & infinito circa axem positione datum, uniformi cum motu, revolvatur; & ab hujus impulsu solo agatur fluidum in orbem; perseveret autem fluidi pars unaquæque uniformiter in motu suo; Tempora periodica partium fluidi erunt ut quadrata distantiarum à centro sphæræ.

Di-

Distinguatur fluidum in orbes sphæricos innumeros concentricos ejusdem crassitudinis. Et, ut prius, tum solum perseverabit fluidum in motu suo uniformi, sine ulteriore acceleratione vel retardatione, ubi motus angulares partium fluidi circa axem globi sint reciproce ut ipsæ superficies sphæricæ concentricæ, sive ut quadrata distantiarum à centro globi reciproce, sive denique, ut tempora periodica partium, iisdem velocitatibus angularibus reciproce proportionalia, sint ut quadrata distantiarum à centro globi directe.

Coroll. (1.) Si fluidum non sit infinitum, sed in vase sphærica contineatur, circumagetur etiam vas sphæricum, & accelerabitur ejus motus quoad usque tempora periodica sphæræ, & vasis, fluidique inclusi æquentur inter se. Quod si vas sphæricum violenter detineatur, conabitur is motum fluidi retardare; & nisi sphæra vi aliqua continuo impressa motum suum conservet, efficiet ut idem, velut in casu priori, paulatim cesset.

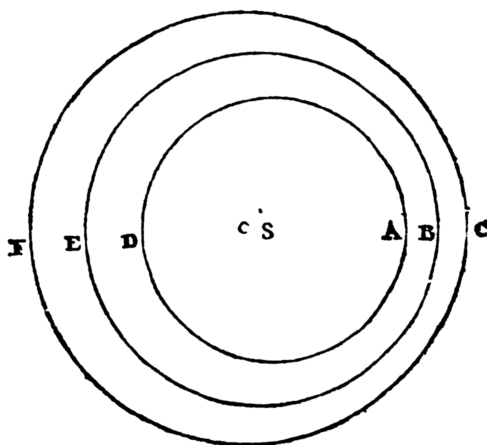
Coroll. (2.) Cum autem Planetarum tempora periodica non sint in ratione distantiarum à Sole duplicata; uti jam vidimus; Liquet hujusmodi fluidi ætherei constitutionem systemati Solari minime etiam convenire; nec ex eadem supposita quicquam auxilii vorticibus Cartesianis accedere.

Coroll. (3.) Cum enim Corpora quæ in vortice delata in orbem eundem sine accessu ad centrum, vel ab eodem recessu perpetuo redeunt; (uti in omnibus planetis tum primariis tum secundariis res se habet;) ejusdem ut sint densitatis cum vortice, & simul cum partibus contiguis ferantur sit necesse: & cum Vortices hujusmodi debeant ita moveri, ut tempora periodica sint in duplicata distantiarum ratione; (contra quam fit in omnibus planetis;) Liquet Planetas à Corporeis vorticibus non deferri. Quod etiam adhuc certius ex proxima Propositione constabit.

LXIX. Velocitates Planetarum omnium sive primariorum, sive secundariorum circa corpora sua centralia, in ratione

tione nempe ſubduplicata diſtantiarum ab illis centris reciproca, Vorticum Carteſianorum hypotheſin omnino ſubruunt, & è medio tollendam demonſtrant.

Planetæ enim, ut jam ubique notum, circa ſuum quique centrale corpus ita in Ellipſibus, umbilicos in eorum centris habentibus moventur, ut radiis ad centra ductis areas deſcribant temporibus proportionales; & ut velocitates ſint in ſubduplicata diſtantiarum ratione reciproca. At Partes vorticis ætherei tali motu revolvi nequeunt. Deſignent enim *AD*, *BE*, *CF*, Orbes tres primarios circa Solem *S* deſcriptos: quorum



extimus *CF* circulus ſit Soli concentricus; & interiorum duorum Aphelia ſint *A*, *B*, & Perihelia *D*, *E*. Ergo corpus quod revolvitur in orbe *CF* radio ad Solis centrum ducto areas temporibus proportionales deſcribendo movebitur uniformi cum motu; Corpus autem quod revolvitur in Orbe *BE* tardiùs movebitur in aphelio *B*, & velociùs in perihelio *C*, ſecundum leges Aſtronomicas, & demonſtratis Geometricis & obſervatis cæleſtibus innixas; cum tamen ſecundum leges mechanicas

mechanicas materia vorticis in ſpatio anguſtiore inter *A* & *C* velocius moveri debeat quam in ſpatio latiore inter *D* & *F*: id eſt, in aphelio velocius quam in perihelio: Quod fieri per obſervata non poteſt. Sic ſane, exempli gratia, In principio ſigni Virginis, ubi Martis aphelium jam verſatur, diſtantia inter orbes Martis & Veneris eſt ad eorundem diſtantiam in principio ſigni Piſcium in ratione fere ſeſquialtera; ſive ut tria ad duo. Et propterea Materia Vorticis inter orbes illos in principio Piſcium debet eſſe velocior quam in principio Virginis in ratione eadem ſeſquialtera. Nam quo anguſtius eſt ſpatium per quod eadem materiæ quantitas eodem revolutionis unius tempore tranſit, eo majori cum velocitate tranſire debet. Igitur ſi terra in hac materia cœleſti relative quieſcens ab eadem deferatur, & una circa Solem revolvatur, foret hujus velocitas in principio Piſcium, ad ejuſdem velocitatem in principio Virginis, in ratione ſeſquialtera. Unde Solis motus annuus apparens unius diei tempore, in principio Virginis major eſſet quam 70′, & in principio Piſcium minor quam 48′. cum tamen (experientia teſte) apparens iſte Solis motus velocior ſit in principio Piſcium quam in principio Virginis; & propterea Terra velocior in principio Virginis quam in principio Piſcium. Itaque Hypotheſis Vorticum cum Phænomenis Aſtronomicis omnino pugnat; & non tam ad explicandos, quam ad perturbandos motus cœleſtes conducit.

Scholium. Hactenus Principia Philoſophiæ Naturalis è Cl. Newtono tradidimus. Non tamen propriè loquendo ea Philoſophice, vel Phyſice, ſed Mathematice potiùs tradidimus. Generales quippe motuum & virium leges & conditiones Aſtronomiam & Philoſophiam Naturalem maxime ſpectantes hucuſque methodo præcipue Mathematica & univerſali Conſideravimus. Omnia tamen, ne ſterilia viderentur, Scholiis non paucis & Corollariis Aſtronomicis, Phyſicis, & Opticis etiam, atque Mechanicis per totam tractationis

seriem ubique illustravimus: atque ita veræ Philosophiæ & Astronomiæ, hoc est, Newtonianæ, haud parum prælusimus, & viam stravimus. Superest jam ut ad ipsam Rerum Naturam & Philosophicas phænomenorum tum Astronomicorum cum Physicorum causas, & verum Mundi Systema diveniamus; & ut ejusdem Systematis Constitutionem, quatenus ex principiis prius positis dependet, doceamus: omissis hic loci aut leviter tactis iis quæ prius inter prælegendum per Scholia vel Corollaria huc spectantia observavimus. Sed cum Novum materiæ campum & Tertium Newtoni Librum ingressuri simus, paululum respirare præstiterit. Manum itaque de Tabula.

Jan. 29°. 170$\frac{6}{7}$.

XXXII.

LXX. PLANETÆ Sex Primarii, cum suo quisque, si quod habent, Satellitio Solem Orbibus suis cingunt; vel circa Solem revolvunt.

Mercurium & Venerem circa Solem revolvi ex eorum phasibus phases Lunares ad amussim referentibus, quod per observata Telescopica ubique jam notum, liquido demonstratur. Nonnunquam enim plena facie circa ipsas conjunctiones diametris Apparentibus tum minimis, lucent; ultra Solem nimirum siti; & plenilunium imitati: nonnunquam obscura facie circa conjunctiones alteras, diametris apparentibus tum maximis, visuntur; citra Solem nimirum positi, & novilunium imitati. Et pariter facie gibba aut cava circa octantes, dimidiata atque dichotoma circa quadras, Lunæ ad instar; per discum Solis aut instar macularum nonnunquam transeunt; partialem eclipsin inducentes: Nonnunquam

nunquam vero ultra Corpus Solare pertranseunt nobis interea invisibiles. Unde certum est, hosce Planetas Solem circumire, & orbibus suis Solem non autem Terram cingere. Et quanquam Mercurius ita raro videatur, nempe circa elongationes solum maximas, & dum per Solem transit, ut non ita clare omnes istæ phases actu observari queant; Cum tamen quæ Mercurii phases videri possunt, huic posituræ respondent optime, & cum eæ Veneris, ejusdem conditionis Planetæ, observationibus frequentissimis aptæ sint, & ubique plenario respondeant, non est quod de reliquis etiam in Mercurio dubitemus. Ex Martis quoque plena facie prope Solis Conjunctionem, & gibbosa facie in quadraturis certum est quod is Solem ambit. Idem etiam de Jove & Saturno, ex eorum faciebus semper plenis, ut ad tantam distantiam accidere debuit, demonstratur. Quanquam enim hi Planetæ facies suas à plenitudine nonnihil diminutas circa quadras ostentare debeant; Cum tamen ista lucis diminutio tantilla esse debeat ut inter observandum vix aut ne vix quidem ullo pacto posset sentiri, Plena horum facies cum hac positura optime congruere est censenda. Quod vero Telluris Orbita Solem cingit, è parallaxi annua alibi exposita abunde constat.

Corollarium. Hinc cum Cartesio, reliquisque etiam superioris seculi Astronomis, colligimus Systema Mundi Ptolemaicum, per tot retro secula ante Copernicanum unice excultum & celebratum, in nihilum abire. Quin & colligimus, Systema Mundi Tychonicum, à tot & tantis Astronomis postea receptum & nobilitatum penitus corruere: nec cum phænomenis nuperrime observatis ullatenus congruere. Tandem colligimus, Systema Copernicanum ab optimis Astronomis plerisque omnibus aliquamdiu approbatum, Verum esse Mundi Systema, & Planetarum omnium ordinem ipsi rerum naturæ & observatis Astronomicis congruentem unice exhibere. Mirum itaque videri debet Astronomiæ Newtonianæ vel Copernicanæ Interpretem Optimum Cl. Gregorium,

 systema-

ſyſtematis veri adeo gnarum, tantum olei & operis in falſis iſtis aliiſque id genus imaginariis hypotheſibus tradendis & exornandis inſumere animum induxiſſe ſuum. Ubi certo certius conſtat Copernicanum Planetarum Ordinem Verum eſſe & genuinum; reliquaſque hypotheſes fictitias plane eſſe cerebri humani fætus; Quorſum ipſam veritatem meris umbris, & naturam rerum inficetis mendaciis immiſcere ſtudemus? Exulent itaque, in æternum exulent, ſyſtemata iſta quondam nobiliſſima, quondam celeberrima è campo noſtro Aſtronomico: & Admittatur illud ſolum, excolatur, exornetur, Quod rerum conditarum vero ordini, veriſque cauſis naturalibus unice correſpondere tandem aliquando grati agnoſcimus. Sed hæc Obiter.

LXXI. Planetarum ſex Primariorum Tempora Periodica ſunt in ratione ſeſquialtera mediocrium diſtantiarum à Sole. Hæc à Keplero primum inventa ratio, Philoſophiæ Newtonianæ Parens, in confeſſo jamjam eſt apud omnes. Ac de Temporum Periodicorum menſura convenit inter Aſtronomos Univerſos: Magnitudines autem Orbium Idem Keplerus & Bullialdus omnium diligentiſſime ex obſervationibus determinaverunt: & diſtantiæ mediocres quæ temporibus periodicis reſpondent non differunt ſenſibiliter à diſtantiis quas illi adinvenerunt; ſuntque inter ipſas utplurimum intermediæ, uti in Tabula ſequente videre licet.

Planetarum diſtantiæ mediocres à Sole.

	Saturn.	*Jup.*	*Mart.*	*Terra.*	*Ven.*	*Merc.*
Sec. Keplerum.	951000	519650	152350	100000	72400	38806
Sec. Bullialdum.	954198	522520	152350	100000	72398	38585
Sec. Temp. Period.	953806	520116	152399	100000	72333	38710

Planetarum autem Veras Periodos jam dabimus: Diſtantias etiam à Sole Veris proximas, ex parallaxi nimirum Telluris Flamſtediana 10 ſecundorum.

Mer-

	circa Solem revolvit spatio	D.	H.	'
Mercurius		87	23	16
Venus		224	16	49
Terra cum Luna		365	6	9
Mars		686	23	27
Jupiter cum Satellitibus 4.		4332	12	20
Saturnus cum Satellitibus 5.		10759	6	36

Mercurius	*distat à Sole*	32.000.000	*Mille-passus Anglicos.*
Venus		59.000.000	
Terra		81.000.000	
Mars		123.000.000	
Jupiter		424.000.000	
Saturnus		777.000.000	

Quod autem methodos attinet distantias hasce inveniendi, sic statuendum. De distantiis Mercurii & Veneris à Sole cum Telluris distantia collatis Disputandi non est locus; cum hæ per eorum Elongationes à Sole Maximas facili observatione notas, ex Trigonometria plana colligantur. De distantiis etiam superiorum Planetarum à Sole ex arcu retrogradationis facile deducendis tollitur insuper omnis disputatio per eclipses Satellitum Jovis ad calculum accuratum juxta hanc distantiam reductas, & cum phænomenis congruentes. Etenim per Eclipses illas determinatur positio umbræ quam Jupiter projicit: & eo nomine habetur Jovis Longitudo Heliocentrica. Longitudo autem Jovis Geocentrica per observationes immediate habetur. In triangulo itaque plano Solis, Jovis, & Telluris centra connectente dantur omnes anguli, & proinde ratio Laterum etiam datur: Sive Ratio Distantiarum Jovis & Terræ à Sole.

Corollarium. Datur itaque distantiarum à Sole Ratio in omnibus Planetis accurate. Quod si qua distantia semel in mensura nota, putà millepassibus vel telluris semidiametris data esset accurate, Omnium distantias ve-

ras unà accurate datas habuissemus: Quod quidem etiamnum desideratur.

LXXII. Planetæ sex primarii radiis ad solem ductis areas temporibus æqualibus semper æquales, & in universum areas temporibus semper proportionales describunt.

Hæc etiam areæ descriptæ æquabilitas ejusdem Kepleri observationi primario debetur: quæ Alter philosophiæ Newtonianæ Cardo merito audire debet: & est apud omnes in confesso. Planetæ quidem quinque reliqui respectu Telluris nostræ nunc progrediuntur; nunc stationarii sunt; nnnc etiam regrediuntur. At Solis respectu semper progrediuntur, idque propemodum uniformi cum motu, sed paulo celerius tamen in Periheliis, ac tardius in Apheliis; sic ut arearum descriptio sit æquabilis. Propositio hæc Astronomis in universum notissima in Jove adprime demonstratur per Satellitum eclipses ad calculum redactas huic hypothesi innixas & apparentibus ad amussim congruas. Hisce enim Eclipsibus Heliocentricum Jovis Locum sive Longitudinem & Distantiam à Sole accuratissime determinari jam diximus.

LXXIII. Luna radio ad centrum Terræ ducto aream tempori æquali semper æqualem fere, & in universum aream tempori fere proportionalem semper describit.

Patet hoc ex Lunæ motu apparente cum ipsius diametro apparente, ejusdem distantiæ tantum non reciproce proportionali, collata. Tempori autem aream non accurate sed *fere* proportionalem asserui, quod perturbatur ista areæ proportionalitas aliquantulum à vi Solis; uti olim explicuimus. Sin istam perturbationem aliunde natam demamus, Propositio erit æque accurata in Luna, ac est in reliquis Planetis; idque propter eandem prorsus rationem.

LXXIV. Planetæ circumjoviales radiis ad centrum Jovis ductis areas describunt temporibus quidem æqualibus

libus ſemper æquales, & in univerſum temporibus ſemper proportionales. Eorumque Tempora Periodica ſunt in ratione ſeſquialtera diſtantiarum ab ipſius centro.

Conſtat pars Propoſitionis utraque ex obſervationibus Aſtronomicis. Orbes enim horum Satellitum non differunt ſenſibiliter à circulis Jovi concentricis, & motus eorum in his circulis uniformes deprehenduntur. Tempora etiam Periodica eſſe in ratione ſequialtera ſemidiametrorum orbium conſentiunt Aſtronomi. Et Cl. Flamſtedius, qui omnia micrometro & per eclipſes Satellitum accuratius definivit, literis ad ipſum Newtonum datis; quinetiam numeris ſuis cum ipſo communicatis ſignificavit rationem illam ſeſquialteram tam accurate obtinere quam ſit poſſibile ſenſu deprehendere. Id quod ex Tabellis ſequentibus erit manifeſtum.

Tempora Periodica.

	D.	H.	′.
1	1	18	$28\frac{3}{5}$
2	3	13	$17\frac{9}{10}$
3	7	3	$59\frac{3}{5}$
4	16	18	$5\frac{1}{5}$

Diſtantiæ à Centro Jovis.

	1	2	3	4	
E Caſſin.	5	8	13	23	*Semidiam. Jovis.*
Borello.	$5\frac{2}{3}$	$8\frac{2}{3}$	14	$24\frac{2}{3}$	
Townleo per microm.	5L51	8L78	13L47	24L72	
Flamſtedio per microm.	5L31	8L85	13L98	24L23	
Flamſt. per eclips. Satel.	5L578	8L876	14L159	24L903	
Ex Tempor. Period.	5L578	8L878	14L168	24L968	

LXXV. Planetæ Circumſaturnii radiis ad centrum Saturni ductis areas deſcribunt temporibus quidem æqualibus ſemper æquales; & in univerſum temporibus ſemper proportionales. Eorumque Tempora Periodica ſunt in ratione ſeſquialtera diſtantiarum ab ipſius centro.

Conſtat etiam pars utraque ex obſervationibus Aſtronomicis. Orbes enim horum ſatellitum vix differunt ſenſibiliter à circulis Saturno concentricis; & motus eorum in his circulis propemodum uniformes deprehenduntur. Tempora etiam Periodica eſſe in ratione ſeſquialtera ſemidiametrorum orbium ſequentes Tabellæ, quas è Cl. Hugenio hic damus, cuilibet rem ad calculum revocanti demonſtrabunt.

Coſmotheor. Pag. 101. 102.

Tempora Periodica.

	D.		H.		′.		″.
1	1	—	21	—	18	—	31
2	2	—	17	—	41	—	27
3	4	—	13	—	47	—	16
4	15	—	22	—	41	—	11
5	79	—	7	—	53	—	57

Diſtantiæ à centro Saturni.

1	$\frac{19}{40}$	*Diametr. Annuli.*
2	$1\frac{1}{4}$	
3	$1\frac{3}{4}$	
4	4	
5	12	

Hiſce ita expoſitis, æquum eſſet ut Gravitatis Vires & Legem ex iiſdem deduceremus. Sed hæc Prælectioni proximæ deputabimus.

Novemb. 17. 1707.

XXXIII.

LXXVI. VIRES quibus ſex Planetæ Primarii cum ſatellitibus ſuis perpetuo retrahuntur à motibus rectilineis & in orbibus ſuis retinentur, Solem reſpiciunt; & ſunt reciproce ut quadrata diſtatiarum ab ipſius centro.

Ob

Ob æquabilitatem enim arearum circa ſolem deſcriptarum, vires hæ ad Solem tendunt. Et ob Tempora Periodica in ratione diſtantiarum ubique ſeſquialtera, Virium Quantitas eſt ubique in duplicata diſtantiarum à Sole ratione reciproca; uti olim demonſtravimus. Pars etiam ſecunda hujus Propoſitionis accuratiſſime demonſtratur per figuram orbium. Si enim Planetæ moverentur circa Solem in Spiralibus radios in dato angulo ſecantibus, vires centripetæ eſſent in diſtantiarum ratione triplicata, vel ut Cubi diſtantiarum reciproce. Si autem moverentur in Ellipſibus centra ſua in Solis centro habentibus, Vires centripetæ eſſent in ipſa diſtantiarum ratione directa. Cum autem moveantur omnes in Ellipſibus Umbilicos ſuos in Solis centro habentibus, uti apud Aſtronomos in confeſſo eſt, vires centripetæ erunt in ratione diſtantiarum duplicata reciproca.

Quod etiam certiſſime demonſtratur per Apheliorum quietem. Ubi enim ratio hæc reciproca duplicata accurate obtinet, quieſcunt Aphelia: ubi ratio ad triplicatam vergit, Progrediuntur: ubi ad ſimplicem rationem accedit, Regrediuntur. Quies itaque Apheliorum in Planetis Primariis indicio eſt vim centripetam eſſe accurate in ratione diſtantiarum duplicata reciproca.

LXXVII. Vires quibus Planetæ Circumjoviales & Circumſaturnii perpetuo retrahuntur à motibus rectilineis, & in orbibus ſuis retinentur, reſpiciunt centrum Jovis & centrum Saturni reſpective; & ſunt reciproce ut quadrata diſtantiarum ab iiſdem centris.

Ob æquabilitatem arearum circa centra Jovis & Saturni reſpective deſcriptarum, vires hæ ad centra Jovis & Saturni tendunt. Et ob Tempora Periodica in ratione diſtantiarum à centris Jovis & Saturni ſeſquialtera, virium quantitas eſt ubique in ratione diſtantiarum ab iſtis centris duplicata reciproca. Cum autem Satellites Circumjoviales & Circumſaturnii in circulis aut ellipſibus à circulis haud ſatis ſenſibiliter diverſis moveantur, nihil ex orbium figura inferri poteſt. Nec proinde ex Aphelio-

Apheliorum quiete. In circulis enim Apſidum linea eſt nulla; atque proinde nihil de ejuſdem quiete aut motu affirmari poteſt.

LXXVIII. Vires quibus Luna perpetuo retrahitur à motu rectilineo, & in orbe ſuo retinetur, reſpiciunt Centrum Terræ; & ſunt reciproce ut quadratum diſtantiæ locorum ab ipſius centro.

Ob æquabilitatem areæ circa centrum Terræ ubique deſcriptæ, niſi quatenus aliquantulum per vim Solis perturbatricem mutatur; vires hæ ad centrum Terræ tendunt. Et ob figuram Orbis Lunaris Ellipticam circa Telluris centrum in Ellipſeos Umbilico poſitum, virium Quantitas eſt ubique in ratione diſtantiarum ab iſto centro duplicata reciproca. Quanquam enim figura hæc Lunaris orbitæ non ſit prorſus Elliptica, neque proinde motus fiat circa centrum Telluris in Ellipſeos Umbilico accurate poſitum; cum tamen omnis hæc varietas aliunde accedat, & à vi Solis perturbatrice ſolummodo oriatur, Figura per ſe eſſe Ellipſis, & Terra in ejus Umbilico primario collocari eſt intelligenda: & proinde vires propriæ centripetæ ſunt in ratione duplicata diſtantiarum à centro Telluris reciproca. Cum autem unicus hic Satelles Terram ambiat, Tempora periodica inter ſe conferenda nullum hic locum habent. Attamen Motus Lunaris Apogæi tardiſſimus indicio eſt vires centripetas à ratione reciproca duplicata parum admodum diſcrepare. Patet enim per Newtoni calculum ex tardo Apogæi progreſſu, quod vis centripeta Lunæ verſus Terram vicibus pluſquam ſexaginta propius ad rationem hanc duplicatam quam ad triplicatam accedat. Oritur autem tota hæc differentiola ab actione Solis perturbatrice, uti olim expoſuimus: & propterea hic negligenda eſt. Reſtat igitur ut vis illa quæ ad Terram ſpectat ſit reciproce ut quadratum diſtantiæ à centro Terræ: Id quod etiam plenius conſtabit conferendo hanc vim Lunæ centripetam cum vi gravitatis in ſuperficie Telluris; ut fiet in ſequente Propoſitione.

LXXIX.

LXXIX. Luna Gravitat perpetuo in Terram; & vi gravitatis retrahitur ſemper à motu rectilineo, & in orbita ſua retinetur.

Ex calculo enim virium centripetarum Lunam in orbita ſua perpetuo retinentium, cum vi gravitatis per experimenta pendulorum accuratiſſime inſtituta apud nos cognita & collata, conſtat vires haſce ejuſdem omnino eſſe quantitatis, & verſus idem Terræ centrum tendentes, uti olim oſtendimus. Et propterea, vis qua Luna in orbita ſua retinetur illa ipſa eſt quam nos *Gravitatem* dicere ſolemus. Nam ſi gravitas ab ea diverſa ſit, corpora viribus utriſque conjunctis Terram petendo duplo velocius deſcendent, & ſpatio minuti unius ſecundi cadendo deſcribent non pedes $16\frac{1}{12}$, ut experientia conſtat; ſed $32\frac{1}{6}$. omnino contra experentiam. Vis itaque centripeta qua Luna in orbita ſua perpetuo retinetur, ea ipſa vis eſt quam nos gravitatem dicimus, & qua omnia corpora in ſuperficie Terræ ab eadem ſeparata verſus eam cadunt; in duplicata nimirum diſtantiæ ratione reciproca; & ea velocitate qua $16\frac{1}{12}$ pedes Anglicos tempore minuti unius ſecundi cadendo deſcribunt.

LXXX. Planetæ Circumjoviales gravitant in Jovem, & Circumſaturnii in Saturnum, & circumſolares in Solem; & vi gravitatis ſuæ retrahuntur ſemper à motibus rectilineis, & in orbibus curvilineis retinentur. Nam revolutiones Planetarum Circumjovialium circa Jovem, & Circumſaturniorum circa Saturnum, & Circumſolarium circa Solem ſunt Phænomena ejuſdem generis cum revolutione Lunæ circa Terram; & propterea à cauſis ejuſdem generis dependere debent. Præſertim cum demonſtratum ſit quod vires à quibus revolut ones illæ dependent, reſpiciant centra Jovis, Saturni, ac Solis; & recedendo à Jove, Saturno, & Sole decreſcant eadem ratione ac lege qua vis gravitatis decreſcit in receſſu à Terra.

Coroll. (1.) Igitur Gravitas datur in Planetas univerſos. Nam Venerem, Mercurium, cæteroſque Planetas eſſe corpora ejuſdem generis cum Jove & Saturno

nemo

nemo dubitat. Certe Planeta quivis Circumsaturnius gravis est in Saturnum, & Circumjovialis in Jovem: Et cum attractio omnis, per Motus Legem 5. mutua sit, Saturnus vicissim gravitabit in Satellites suos; & Jupiter in suos; Terraque in Lunam; & Sol in Planetas omnes, tum Primarios, tum Secundarios gravitabit.

Coroll. (2.) Gravitas quæ Planetam unumquemque respicit, est reciproce ut quadratum distantiæ locorum ab ipsius centro.

LXXXI. Corpora omnia in Planetas singulos gravitant: & Pondera eorum in eundem quemvis Planetam, paribus distantiis à centro Planetæ, Proportionalia sunt quantitati materiæ in singulis.

Descensus gravium omnium in Terram, dempta saltem inæquali retardatione quæ ex aeris resistentia oritur, æqualibus temporibus fieri jamdudum fuit observatum, & nos prius observavimus, sive corpora descendentia magna sint, sive parva; sive liquida sint, sive dura; sive solida sint, sive fluida. Quod quidem ad amussim congruit tum experimentis corporum directe descendentium, cum præcipue pendulorum in arcubus sive circularibus sive cycloïdalibus oblique descendentium. Hæc enim omnia ad eandem centri oscillationis à centro suspensionis distantiam per arcus æquales demissa æqualia prorsus temporis spatia in descensu & ascensu impendunt, & eunt simul redeuntque diutissime. Proinde, cum obliquitas motus curvilinearis sit in hoc casu ubique similis & æqualis, eadem corpora simul dimissa in spatio vacuo paribus temporibus paria omnino spatia in descensu vel ascensu perpendiculari impendunt: & proinde pondere materiæ quantitati ubique ad amussim proportionali impelluntur. Ubi enim materiæ quantitas dupla vel tripla, vi etiam in universum dupla vel tripla urgetur, nec aliter, velocitas motus erit semper æqualis: hoc est, ubi quælibet cujusque corporis particula æqualis æquali gravitatis vi urgetur, summa omnium sive in magno corpore, sive in parvo proportionali gravitatis

vi urgebitur; & omnes particulæ mutuos conatus neque accelerantes neque retardantes pari semper velocitate descendent, & æquali vi in terram gravitabunt. Quod vero experimenta corporum pendulorum sic se habeant, prius ostendimus: & rem sigillatim tentavit Newtonus in auro, argento, plumbo, vitro, arena, sale communi, ligno, aqua, & tritico e. g. Duarum Pixidum lignearum rotundarum & æqualium unam implevit ligno; & idem auri pondus suspendit quam potuit exacte in alterius centro oscillationis. Pixides ab æqualibus pedum undecim filis pendentes constituebant pendula quoad pondus, figuram, & aeris resistentiam omnino paria. Et paribus oscillationibus juxta positæ ibant una & redibant diutissime. Et in corporibus ejusdem ponderis, differentia quantitatis materiæ, quæ vel minor esset quam pars millesima materiæ totius, his experimentis manifesto deprehendi potuit. Jam vero Naturam gravitatis in Planetas reliquos & Solem ipsum eandem esse atque in Terram nullus est satis sonticus dubitandi locus. Quod etiam ex figura omnium sphærica, per mutuum partium omnium ad se mutuo gravitantium æquipondium nec aliunde facile deducenda, liquere potest. Porro, Elevari fingantur corpora hæc terrestria ad usque orbem Lunæ, & una cum Luna motu omni privata demitti, ut in terram simul cadant: Per nuper Ostensa certum est quod temporibus æqualibus describent æqualia spatia atque Luna ipsa describeret; adeoque quod sunt ad quantitatem materiæ in Luna, ut pondera sua, ad ipsius pondus. Præterea, quoniam Satellites Jovis, & Saturni temporibus revolvuntur quæ sunt in ratione sesquialtera distantiarum à Centris Jovis & Saturni, erunt eorum gravitates acceleratrices in Jovem & Saturnum reciproce ut quadrata distantiarum ab istis centris: & propterea æqualibus à Jove & Saturno distantiis omnibus, eorum gravitates acceleratrices evadent æquales; & corpora omnia æque afficient. Atque proinde temporibus æqualibus ab æqualibus altitudinibus cadendo describerent

ſcriberent æqualia ſpatia, perinde ut fit in gravibus in hac terra noſtra. Et eodem argumento Planetæ Circumſolares ab æqualibus à Sole diſtantiis dimiſſi, deſcenſu ſuo in Solem æqualibus temporibus æqualia ſpatia deſcriberent. Porro Jovis & Saturni & eorundem Satellitum pondera in Solem proportionalia eſſe quantitati materiæ earum, patet ex motu Satellitum quam maxime regulari, & orbitis Jovi & Saturno fere concentricis. Nam ſi horum aliqui magis traherentur in Solem, pro quantitate materiæ ſuæ, quam cæteri, motus Satellitum ex inæqualitate attractionis perturbarentur; & in tantum quidem perturbarentur ut ſi, æqualibus à Sole diſtantiis, gravitas acceleratrix Satellitis alicujus Jovialis, verbi gratia in Solem major eſſet vel minor quam gravitas acceleratrix Jovis in Solem parte tantum milleſima totius gravitatis, ex ipſius Newtoni calculo foret diſtantia centri Orbis Satellitis à Sole major vel minor quam diſtantia Jovis à Sole parte bis-milleſima diſtantiæ totius; in ſubduplicata nimirum diſtantiæ ratione; id eſt, parte quinta diſtantiæ Satellitis extimi à centro Jovis. Quæ quidem orbis eccentricitas foret valde ſenſibilis. Sed Orbes Satellitum Jovis ſunt Jovi concentrici; & propterea gravitates acceleratrices Jovis & Satellitum in Solem æquantur inter ſe. Et eodem argumento pondera Saturni & Satellitum ejus in Solem, æqualibus à Sole diſtantiis, ſunt ut quantitates materiæ in ipſis. Et pondera Lunæ ac Terræ in Solem pariter ſunt earum maſſæ accurate proportionalia. Eodem modo res ſeſe habet quoad pondera partium ſingularum Planetæ cujuſque in alium quemque; ſive partes ſint internæ, ſive externæ: Nam ſi partes aliquæ plus, aliæ minus gravitarent quam pro quantitate materiæ totius, Planeta totus vel Satelles pro genere partium quibus maxime abundaret, gravitaret magis vel minus quam pro quantitate materiæ totius; omnino contra experientiam. [Sed hæc hactenus. Corollaria enim

hujus

hujus Propositionis utilissima Prælectioni proximæ reservabimus.]

Novemb. 24°. 1707.

XXXIV.

Coroll. (1.) HINC Pondera corporum minime pendent ab eorum formis & texturis. Nam si cum formis variari & mutari possent, forent majora vel minora pro varietate formarum in æquali materia; omnino contra experientiam.

In Scholis recens reparatis.

Coroll. (2.) Igitur corpora universa quæ circa terram sunt, sive ligna, sive metalla, sive lapides, sive aqua, sive aer, sive vapores, gravia sunt in terram; & pro ratione materiæ æqualiter gravia. Si Cortex, vel Lana, vel Aer, pondo unius libræ in vacuo æquivaleat, & Aurum, vel Argentum vivum, vel Æs eidem pondo ibidem æquivaleat, Quantitas materiæ erit in omnibus omnino æqualis.

Coroll. (3.) Pondus itaque corporum quorumcunque in vacuo est certissimus quantitatis materiæ Index. In corporibus enim mole æqualibus tanta esse solet densitatis diversitas, ut ex apparente corporis magnitudine nullo modo de materiæ in eodem contentæ quantitate statui possit. Cum vero illa ponderi sit ubique proportionalis, ex eodem pondere certissime determinari potest.

Coroll. (4.) Itaque Vacuum necessario datur. Nam si spatia omnia Plena essent, gravitas specifica fluidi quo Regio aeris impleretur, imo & vacui cujusvis quod vocamus Boyleanum ob densitatem materiæ omnino summam & perfectissimam, sive potius infinitam, nil cederet gravitati specificæ argenti vivi, vel auri, vel corporis alterius cujuscunque densissimi. Et propterea nec aurum ipsum cor-

corporum omnium ſpecifice graviſſimum, in aere deſcendere poſſet: omnino contra experientiam. Ut omittam argumenta omnem omnino motum in ſpatio pleno tollentia; quæ quidem ſatis per ſe ſolida videntur.

Coroll. (5.) Cum ex pondere æque ac reſiſtentia quantitas materiæ ubique innoteſcat; & cum ex pondere liqueat corpora pleraque omnia apud terram multo plus ſpatii vacui quam materiæ ſolidæ in ſe continere; cum etiam ex minima & plane imperceptibili Planetarum Cometarumque reſiſtentia liqueat ſpatia cœleſtia ſive ætherea omni quaſi materia eſſe vacua; quin & Planetas & Cometas ipſos, imo & Solem Stellaſque fixas, quaſi nihili puncta, inſtar ætheris vacui quaſi evaneſcere; Palam eſt rerum naturam adeo non *à Vacuo abhorrere*, quod ſomniarunt haud pauci, præſertim Carteſiani, ut ea potius parum in ſe præter Vacuum contineat. Tantillum poteſt ingenium humanum in Operibus Dei inveſtigandis, ubi Experimenta deſunt, & ratiocinia Mathematica! Vix enim, ut opinor, Sagaciſſima Carteſii ipſius mens, hiſce fundamentis deſtituta, vel ſemel veras rerum cauſas Phyſicas, & inventis nuperis congruas excogitare potuit.

Coroll. (6.) Gravitatis vis eſt generis diverſi à vi magnetica. Attractio enim magnetica non eſt ut materia attracta; cum corpora aliqua magis, alia minus, plurima non omnino attrahantur. Eſtque vis magnetica longe major pro quantitate materiæ quam vis gravitatis, cum magnes perexiguus ipſam totius telluris vim attrahentem exuperare poſſit, & clavem ferream ſuſtollere. Sed & vis magnetica in eodem corpore intendi & remitti poteſt; in receſſu vero à magnete decreſcit in ratione diſtantiæ pluſquam duplicata, quæ tamen eſt ratio gravitatis perpetua, propterea quod vis longe fortior ſit in ſuperficierum contactu quam cum attrahentia vel minimum ab invicem ſeparantur.

LXXXII. Vis gravitatis corpora univerſa, Syſtema ſaltem Solare occupantia, ſpectat; & proportionalis eſt quan-

quantitati materiæ in singulis. Planetas omnes in se mutuo graves esse; & gravitatem in unumquemque seorsim spectatum esse reciprocè ut quadratum distantiæ locorum à centro Planetæ jamjam probavimus. Si quid dubii oriri posset illud certe esset de gravitate unius Primarii Planetæ in alium: nam de communi omnium ad centralia sua corpora gravitate res per demonstrata priora planior est quam ut ullo modo possit labefactari. Quin & non deest indicium apertum gravitatis etiam Planetas diversos spectantis. Cum enim ante aliquot annos Saturnus circa conjunctionem cum Jove diu hæsisset, & proinde ob corporis magnitudinem & viciniam non potuit non sensibiles aliquos effectus in Jovis Satellitibus perturbandis edere, si modo Jupiter cum suis Satellitibus ad Saturnum pro universa hac attractionis mutuæ lege gravitaret, res ipsa revera ita se habuisse est comperta. Ipse enim Cl. Flamstedius qui primitus talem ullam in motibus Satellitum Jovis perturbationem abnueret, re melius perpensa, & observationibus cum calculo accuratius collatis ingenue fassus est istam universalem gravitatis legem etiam hoc casu valuisse; motusque istos, prout fieri debuit, perturbatos à Saturni vicinia, & calculis prioribus minus congruos reapse apparuisse. Consequens itaque est per Prop. 81. ejusque Corollaria gravitatem dari in omnes Planetas, & eam proportionalem esse materiæ in iisdem contentæ.

Porro, cum Planetæ cujusvis, puta Mercurii, partes omnes graves sint in Planetam quemvis alium, puta Venerem; & gravitas particulæ cujusque, sit ad gravitatem totius, ut materia partis, ad materiam totius; & actioni omnis reactio (per motus Legem 5.) æqualis sit, Venus in partes omnes Mercurii vicissim gravitabit; & erit Gravitas Veneris in partem unamquamque, ad gravitatem suam in totum, ut materia partis, ad materiam totius.

Corollarium. Oritur igitur & componitur gravitas in Planetam quemvis totum ex gravitate in partes singu-

U las

las; uti fit in attractionibus Magneticis, & Electricis: ubi quo majus est attrahens, eo cæteris paribus major est attractio. Oritur enim attractio omnis in totum ex attractionibus in partes singulas; nec aliter res rite concipi potest. Hoc facilius intelligetur in gravitate, concipiendo Planetas plures minores, omnia corpora seorsim attrahentes, in unum globum coire, & majorem Planetam componere. Nam vis totius ex viribus partium componentium oriri omnino debet. Si quis objiciat, Quod corpora omnia quæ apud nos sunt, hac lege gravitare deberent in se mutuo; cum tamen ejusmodi gravitas neutiquam sentiatur; Responsio facilis est; quod gravitas in hæc corpora, cum sit ad gravitatem in terram totam, pari distantia, ut sunt hæc corpora, ad Terram totam, longe minor est, quam ut ullo indicio sensibili dignosci possit.

Coroll. (2.) Gravitatio in singulas corporis particulas æquales est reciproce ut quadratum distantiæ locorum à particulis.

LXXXIII. Si Globorum duorum in se mutuo gravitantium materia undique in regionibus quæ à centris æqualiter distant homogenea sit, erit pondus Globi alterutrius in alterum reciproce ut quadratum distantiæ inter centra.

Postquam invenisset Cl. Newtonus gravitatem in Planetam totum oriri & componi ex gravitatibus in partes, & esse in partes singulas reciproce proportionalem quadratis distantiarum à partibus, dubitabat, an reciproca illa proportio duplicata obtineret accurate in vi tota ex partibus pluribus composita; an vero quam proxime. Nam fieri potuit ut proportio illa in majoribus distantiis satis obtineret; at prope superficiem Planetæ ob inæquales particularum distantias & situs dissimiles notabiliter erraret. Tandem vero per Prop. 44 & 45. & ipsarum Corollaria eandem proportionem in sphæricis corporibus, ad eandem ubique à centris distantiam æque densis, accurate obtinere intellexit.

LXXXIV.

LXXXIV. *Problema.* Pondera corporum in diversos Planetas vel in Solem, ad datas diſtantias ab iſtorum centris definire.

CASUS (1.) Pondera corporum extra Planetarum ſuperficiem ad diſtantias æquales definire. Nimirum cum pondera ad diſtantias æquales ſint ut quantitates materiæ in Planetis verſus quos fit gravitatio, & cum iſtud pondus vel materiæ quantitas ex ejus attractionis quantitate, tanquam cauſa ab effectu, unice dignoſci poſſit; cum demum iſta attractionis quantitas ſit proportionalis velocitatum in æqualibus hiſce circulis quadratis directe, vel temporum periodicorum quadratis reciproce; ex velocitatum quadratis Rationes Ponderum faciliime innoteſcent. Ex Temporibus itaque periodicis Planetarum alios circa ſe revolventes habentium prius exhibitis hujuſmodi orietur ratio ponderum in Solem, Jovem, Saturnum, ac Terram reſpective:

Pondus in	*Solem*	——	229600
	Jovem	——	208L72
	Saturnum	——	97L328
	Terram	——	1
	Et *in Lunam*	—	$0\frac{1}{26}$.

Iidem autem numeri qui *ponderis* rationem etiam & *quantitatis materiæ* rationem oſtendunt Hac autem analogia tempora periodica diſtantiis realibus congrua ad periodica tempora diſtantiæ datæ cuilibet congrua facile reducentur: nimirum ut Diſtantiæ realis Cubus, ſe habet ad diſtantiæ datæ Cubum, ita Temporis realis periodici Quadratum, ad quartum numerum, ſive ad Temporis Periodici quæſiti Quadratum. Hujuſce igitur numeri radix quadratica dabit Tempus ipſum Periodicum quæſitum. Et hoc pacto rationes ponderum & materiæ in Sole, Jove, Saturno, & Terra obtinemus. Luna autem, cum nullum Satellitem circum ſe habeat, & proinde hujuſmodi indicium nullum ponderis

 in

in se aut materiæ contentæ exhibeat, in æstu autem marino aliud indicium olim exponendum exhibeat, Inde nos eandem mutuo acceptam hic loci reliquis adscribendam duximus.

CAS. (2.) Pondera Corporum ad semidiametrorum Planetariarum distantias, sive in Planetarum superficiebus definire. Eadem nempe methodo ac in priore casu, & simili prorsus analogia ad particulares hasce distantias accommodata. Quo calculo, si semidiametros Planetarum juxta Flamstedium determinatas pro veris habeamus, sic se res habebit,

Sol	*Patet secundum diametrum.*	763460	*Milliaria Anglica.*
Saturnus		67870	
Jupiter		81155	
Mars		4444	
Tellus		7935	
Luna		2175	
Venus		7906	
Mercurius		4240	

Pondus ergo corporum æqualium in Planetarum superficiebus sic se habet.

In	*Solem*	24
	Terram	1
	Jovem	1⌊99
	Lunam	⌊515
	Saturnum	1⌊7

Atque hæc impræsentiarum sufficiant. Reliqua enim in Prælectionem proximam differentur.

April 26. 1708.

XXXV.

XXXV.

LXXXV. PROBLEMA. Densitates Planetarum definire. Nimirum cum quantitatem materiæ in Planetis quinque in casu priore ultimæ Propositionis determinatam habeamus; & cum Diametros omnium Planetarum secundum Flamstedium in casu secundo etiam habeamus determinatam; Exinde facile fuerit è data materiæ quantitate in datis sphæris contenta ejusdem materiæ densitatem calculo determinare: quam itaque Tabella apposita exhibebit.

Densitas	*Lunæ* ——	7⌊00
	Terræ ——	3⌊87
	Solis ——	1⌊00
	Jovis ——	⌊76
	Saturni ——	⌊60

LXXXVI. Gravitas pergendo à superficiebus Planetarum deorsum decrescit in simplici ratione distantiarum à centris quam proxime.

Si enim Planetæ materia quoad densitatem uniformis esset, obtineret hæc ratio accurate; per Prop. 47. Error igitur tantus est, quantus ab inæquali densitate oriri possit.

Corollarium. Gravitas itaque corporum in ipsis Planetarum superficiebus est omnium maxima, & utrinque decrescit; estque sursum in duplicata reciproca distantiæ ratione, deorsum vero in simplici ratione directa.

LXXXVII. Motus Planetarum & Cometarum in cœlis diutissime conservari possunt.

Cum enim Mediorum resistentia, quæ sola motus hosce semel incæptos retardare & sistere posset, minuatur in ratione ponderis sive materiæ densitatis; sic ut aqua, quæ vicibus fere quatuordecim levior est quam argentum vivum, minus resistat in eadem ratione; & aer, qui vicibus fere mille levior est quam aqua, minus re-

ſiſtat in eadem ratione; Si ultra Atmoſphæram noſtram, ipſam quoque quaſi in infinitum gradatim rareſcentem, in cœlos, ubi pondus vel denſitas medii, in quo Planetæ moventur, diminuitur in immenſum, reſpiciamus, reſiſtentia tantilla erit ut per millennia aliquot vix evadat ſenſibilis: uti revera fuiſſe inſenſibilem motus cœleſtes à primis Aſtronomiæ incunabulis ſine notabili mutatione aut jactura hucuſque perſiſtentes evincunt.

Corollarium. Cum vero in tempore infinito perexigua iſta Reſiſtentia, ſi qua ſit, omnes iſtos motus debuerit retardare, penituſque ſiſtere, palam eſt ex iſta hypotheſi hodiernum cœlorum ſtatum nec à parte ante fuiſſe, nec à parte poſt futurum æternum. Præſertim autem hoc omnino valebit alio nomine, ſi nempe vim gravitatis in tota rerum Univerſitate, & non tantum in Syſtemate Solari obtinere, cum Newtono, ſtatuamus. Si enim Fixæ ſtellæ, ſive Soles, cum Planetis ſuis Cometiſque qualicunque exiſtunt numero, modo non ſit infinitus, Gravitatis vi ſubjecti fuerint, longo demum tempore vis iſta ea omnia una contraxiſſet, & in Univerſi gravitatis centro communi congeſta quieſcere juſſiſſet. Quod etiam tempore infinito futuro ex eodem hypotheſi, ſine Divinæ Providentiæ interpoſitu, neceſſario eſt eventurum. Ut itaque Præſens rerum ſtatus tempore certo cœpit, à Dei O. M. nutu & potentia inchoatus; ita tandem aliquando fieri poteſt ut finem ſortiatur: cum ſcilicet Beneplacito Divino id viſum fuerit: ſine cujus etiam perenni actione, unde Vis hæc miranda gravitatis dependet tota, ne minimum temporis ſpatiolum perdurare poteſt.

LXXXVIII. Commune centrum gravitatis Terræ, Solis, & Planetarum omnium aut quieſcit, aut movetur uniformiter in linea recta. Hoc ex prius demonſtratis liquet. Neque ſane ullo certo indicio apparet utrum quieſcat an moveatur. Hoc tantum ſtatuere licet, Quod ſi moveatur centrum illud, & cum eo Solare Syſtema ut moveatur eſt neceſſe. Stellæ enim

fixæ

fixæ nos undique cingentes nec majores ex ulla parte nec minores nobis hodie apparent quam antiquis Astronomis ante annos bis mille apparuisse narrantur. Quod quidem phænomenon aut centri gravitatis quietem, aut saltem motum tardiusculum monstrare videtur.

Coroll. (1.) Hinc commune centrum gravitatis Solis & Planetarum omnium pro centro Systematis Solaris sive Mundi Planetarii habendum est. Nam cum Sol & Planetæ omnes gravitent in se mutuo, & propterea pro vi gravitatis suæ secundum leges motus prius expositas perpetuo agitentur; Perspicuum est quod horum centra mobilia pro Mundi centro quiescente haberi nequeunt. Si corpus illud in Centro locandum sit in quod corpora omnia maxime gravitant, & quod centro immobili est proximum, uti rationi est maxime consentaneum, privilegium illud concedendum est Corpori Solari; quod itaque physice loquendo *Centrum Mundi Planetarii* jure merito est habendum. Sin accurate & mathematice loqui velimus, cum Sol ipse moveatur, & nullum corpus sensibile quiescat in centro, Eligendum erit Centrum Gravitatis totius Systematis pro Mundi nostri Centro: quod quidem Centrum revera quiescere videtur: & à quo Centrum Solis quam minime discedit. Physice itaque Sol ipse, Mathematice autem Centrum istud Gravitatis est Mundi nostri Centrum.

Coroll. (2.) Nulla ergo datur perfecta quies in natura rerum. Quiescat enim commune Systematis Centrum; at *solum* certe quiescit: omnibus Systematis partibus perpetuo motis. Et cum centrum gravitatis sit non corpus physicum, sive reale, sed punctum mathematicum, sive plane nihil, ex hoc ratiocinio sequitur omnino nihil reale quiescere; sive nullam dari in Systemate Solari corporum realem & perfectam Quietem.

LXXXIX. Corpus Solare nunquam quiescit; sed motu perpetuo agitatur. Nunquam vero longe recedit à communi omnium Planetarum Gravitatis centro,

Nam cum quantitas materiæ in Sole, ſit ad quantitatem materiæ in Jove, ut 229.600 ad 208[?]72. ſive ut 1100 ad 1. & diſtantia Jovis à Sole, ſit ad ſemidiametrum Solis, ut 424.000.000, ad 381.730. ſive ut 1100 ad 1, hoc eſt, in eadem ratione circiter; Commune centrum gravitatis Jovis & Solis, ad diſtantiam corporibus ipſis reciproce proportionalem poſitum, incidet fere in ſuperficiem Solis. Eodem argumento cum quantitas materiæ in Sole, ſit ad quantitatem materiæ in Saturno, ut 229.600 ad 97[?]328. ſive ut 2360 ad 1. & diſtantia Saturni à Sole, ſit ad ſemidiametrum Solis ut 777.000.000 ad 381.730. ſive in ratione paulo minori; incidet commune centrum gravitatis Saturni & Solis in punctum paulo infra ſuperficiem Solis. Unde Commune centrum gravitatis Jovis & Saturni ex parte una, & Solis ex altera parte poſitorum integra Solis Diametro à centro Solis minime diſtabit. Et ejuſdem calculi veſtigiis inſiſtendo, ſi Terra & Planetæ omnes ex una Solis parte conſiſterent, propter reliquorum parvitatem & viciniam, Commune omnium centrum gravitatis vix integra Solis Diametro à centro Solis diſtaret. Aliis vero in caſibus, quod plerumque fit, diſtantia centrorum minor erit: & ubi Planetæ hinc inde poſiti ſibi mutuo æquiponderent, plane nulla. Propterea, licet centrum illud gravitatis revera quieſcere ſupponatur, Sol pro vario Planetarum ſitu in omnes partes aliquantulum movebitur; ſed à communi illo gravitatis centro nunquam longe recedet.

XC. Planetæ omnes Primarii moventur in Ellipſibus, Umbilicum communem in Centro Solis habentibus; & radiis ad centrum illud ductis areas deſcribunt temporibus proportionales. Quæ etiam Propoſitio vera eſt in Secundariis circa Primariorum ſuorum centra revolventibus.

Hæc quidem ſupra ex Phænomenis Aſtronomicis deduximus. Jam vero cognitis & ſtabilitis motuum horum principiis, ex his colligimus motus cœleſtes à priori.

Ex

Ex gravitatis enim directione versus centra Solis & Planetarum Primariorum, arearum descriptarum æquabilitas; & ex gravitatis lege versus ista centra, nempe in distantiæ ratione reciproca duplicata, figura ista Orbium Elliptica circa Centra ista in Umbilicis posita necessario sequitur; uti olim è Newtono demonstravimus. Et hæc quidem se haberent accurate, si Sol & Planetæ Primarii quiescerent, neque se in mutuo agerent. Forent enim orbes eorum ad rigorem Geometricum Elliptici, Solem Planetasque Primarios in Umbilicis habentes; atque areæ descriptæ essent accurate æquabiles, sive temporibus proportionales. Actiones autem Solis & Planetarum in se mutuo perexiguæ sunt, ut merito contemni possint. Et motus Planetarum in Ellipsibus circa Solem & Primarios mobiles quam si immobiles essent minus perturbantur, uti olim observavimus. Unde physice loquendo, Propositio etiamnum Vera est censenda. Actio quidem Jovis in Saturnum ejusque 5. Satellites; & Saturni in Jovem ejusque 4. Satellites non est omnino contemnenda. Cum hi planetæ ingentes sint, & ad maximam à Sole distantiam positi. Unde attractionibus suis mutuis circa conjunctiones suas heliocentricas, ob motuum tarditatem haud parvo etiam tempore durantes, inæqualites nonnullæ tam in orbitarum figuris quam in motibus utrinque orientur: vix tamen in ipsis Planetarum horum Primariorum, adeo ac in Satellitum, præsertim Jovialium motibus inæqualibus dignoscendæ.

Scholium. Ex Cl. Newtoni calculo vis perturbatrix sive Gravitas Saturni in Jovem, est ad Gravitatem Saturni in Solem, circa Planetarum istorum conjunctionem, ut 1 ad 217 circiter.. Et Gravitatum Solis in Saturnum, & Jovis in Saturnum differentia, est ad gravitatem Jovis in Solem, ut 1 ad 1867. Cui quidem differentiæ proportionalis est vis maxima perturbatrix Saturni in Jovem. Unde perturbatio orbis Jovialis longe minor est quam ea Saturnii. Reliquorum autem

Orbium

Orbium perturbationes ex calculo adeo exiguæ deprehendentur, ut omnino debeant contemni.

XCI. Orbium Aphelia & Nodi quiescunt.

Propter vim gravitatis in distantiæ ratione duplicata reciproca, Apsides & Aphelia per se quiescere debent; uti prius monitum. Et propter vim eandem, punctum fere immobile semper respicientem, Orbium plana etiam debent quiescere; & quiescentibus planis ut Nodi sive planorum intersectiones quiescant est necesse. Notandum tamen inæqualitates nonnullas à Planetarum revolventium & Cometarum actionibus in se invicem labentibus seculis orituras; tantillas tamen, ut ob parvitatem plerumque contemni possint. Notandum etiam nos hic loci Centri Gravitatis systematis totius quietem, cum Astronomis omnino omnibus, supponere; etsi quietem istam, uti prius monuimus, nondum *demonstrare* licuerit. His autem positis sequentia Corollaria deducemus.

Coroll. (1.) Quiescunt stellæ fixæ, propterea quod datas ad Aphelia Nodosque quiescentes positiones servant. Novum certe hoc ratiocinii Astronomici genus! ut ex Planetarum erraticorum systemate Inerrantium quies inferatur: cum è contra ex fixarum quiete supposita Planetarum motus determinare hactenus soliti fuerimus. Ignoratis nimirum ante Cl. Newtonum veris motuum cœlestium causis hujusmodi Corollaria nobilissima ut ignorarentur erat omnino necessum.

Coroll. (2.) Cum fixarum parallaxis, etiam annua, tantilla sit, ut vix Observatoribus accuratissimis se tandem prodat, vires earum, ob immensam corporum distantiam, nullos effectus sortientur sensibiles in regione systematis nostri.

Coroll. (3.) Unde sequitur *Astrologiam Judiciariam*, quam vocant, non solum Planetarum sed & Fixarum posituris & influentiis innixam, omni certo fundamento carere: cum vires maximas eorum corporum supponat quas minimas plane, sive potius omnino nullas

esse

esse superiori Corollario sit recte observatum. Quin & hoc etiam addere liceat, vires Planetarum præter Solem & Lunam reliquorum, quas tantopere crepant Astrologi, aut ob distantias enormes, aut ob corporum parvitatem tantillas esse in Atmosphæra nostra, & apud Tellurem, ut vix aut ne vix quidem ullo indicio *sentiri* possint; nedum ut effectus istos, magnos certe & admirandos, quos supponunt, ullo pacto producere queant. Qui Idololatrarum more Stellas Deos esse, vel Deos iis inesse Immortales opinantur, habent, quo patrocinentur hypothesi suæ. Qui vero tam crasso errori olim valedixerunt, mirum quo fato istis næniis, omni sana ratione cassis, tam pertinaci animo etiamnum adhæreant.

Maii 17°. 1708.

XXXVI.

XCII. PLANETARUM motus diurni uniformes sunt & æquabiles: & Librationes Lunæ, ex ipsius motu diurno æquabili, cum menstruo inæquabili collata, & secundum axem ad orbitam inclinatam peracto necessario oriuntur.

Hæc olim annotavimus; nec multis verbis hic opus. Quoniam vero Lunæ circa axem suum uniformiter revolventis dies menstruus est; (periodicum mensem hic volumus:) Hujus facies eadem *superiorem* fere Ellipseos Umbilicum, non vero Tellurem in *inferiori* positam semper respiciet; eo quod motus angularis quoque circa istum Umbilicum fere sit æquabilis, inæquabilis vero circa Tellurem. Et propterea pro situ Umbilici superioris deviabit plerumque hinc inde à Terra, & partes nunc orientaliores nunc occidentaliores nobis exhibebit:

bit: quæ eſt *Libratio Lunæ in Longitudinem*. *Libratio* autem *in Latitudinem*, qua partes nunc borealiores nunc auſtraliores nobis oſtenduntur, oriri debet ex inclinatione axis Lunaris ad planum ſuæ orbitæ; uti rem attentius conſideranti erit apertiſſimum.

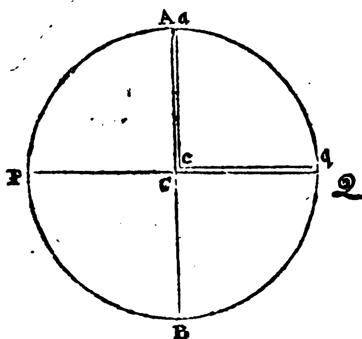
Corollarium. Hic loci annotare placet quam accurate inter ſe conſentiant motus hi duo Lunares, neutiquam à ſe invicem dependentes; diurnus nempe & menſtruus: ita ut alter alterum ne minimum quidem antevertere, per bis mille ſaltem annos, ſit deprehenſus. *Non hoc* certe *ſine numine Divûm*, uti alias annotavimus.

XCIII. Axes Solis & Planetarum motu diurno gaudentium Diametris quæ ad eoſdem axes normaliter ducuntur minores ſunt. Sive Figura Solis & Planetarum in ſe motu diurno revolventium ea eſt ſphæroidis oblatæ; hoc eſt, ſolidi revolutione Ellipſeos circa axem minorem geniti.

Planetæ & corpora quævis cœleſtia ſublato omni motu circulari diurno figuram ſphæricam, ob æqualem undique partium gravitatem, affectare & induere deberent. Per motum autem circularem diurnum fiet, ut partes ab axe motus neceſſario recedentes, & gravitati detrahentes juxta æquatorem, ubi motus eſt celerrimus, aſcendere conentur. Ideoque eo loci materia Planetæ, niſi admodum ſit ſolida, aſcenſu ſuo ad æquatorem ejuſdem diametros adaugebit; axem vero deſcenſu ſuo, gravitate partium ibi nihil diminuta, ad polos diminuet. Sic Jovis Diameter (conſentientibus obſervationibus Caſſini & Flamſtedii) brevior deprehenditur inter Polos quam ab oriente in occidentem. Eodem Argumento Terra noſtra axem ſuum Æquatoris diametris minorem habere debuit. Niſi enim ita ſe res haberet, & terra noſtra paulo eſſet altior ſub æquatore quam ad polos, maria, ob gravitatem majorem circa polos ſubſiderent, & juxta æquatorem aſcendendo omnia inundarent. Ob majorem vero motus diurni velocitatem & denſitatem minorem, Jupiter differentiam diametrorum multo ma-

gis sensibilem quam reliquorum Planetarum quivis, vel Sol ipse exhibere debet. Unde Observatores Astronomici in hoc solo Planeta hanc differentiam hactenus deprehendere potuerunt. Tellurem autem nostram eandem figuram olim induisse patet, non tantum indicio nuperrime exposito, sed & per pendulorum experimenta accuratissime instituta. Quo enim horologia Oscillatoria eadem penduli longitudine gaudentia Æquatori proprius admoventur, oscillationes paulo tardiores, quo ad Polos propius accedunt paulo velociores observantur; eo nimirum quod in casu priori centrum Telluris propius, in posteriori remotius retardationem & accelerationem corporum pendulorum respective procuret, uti ex præsenti Propositione fieri erat necesse.

Scholium. Si Proportionem Axis Planetæ cujusvis ad Æquatoris Diametros accurate rescire cupiatis, Multiplices Calculi Newtoniani ambages obire oportebit. Sin calculi hujusce fructum sine calculi tædio percipere placeat, sic accipitote. Inito nimirũ calculo invenit Newtonus quod vis centrifuga partium terræ sub æquatore, ex motu diurno oriunda, sit ad vim gravitatis in terræ superficie ut 1 ad $290\frac{4}{5}$. Unde si *APBQ* figurã Terræ designet revolutione ellipseωs circa axem minorẽ *PQ* genitam; sitque *ACQqca* canalis aquæ plena à Polo *Qq* ad centrum *Cc* & inde ad æquatorem *Aa* pergens, debebit pondus aquæ in canalis crure *ACca*, esse ad pondus aquæ in crure altero *QCcq*, ut 291, ad 290 fere. Eo quod vis centrifuga ex circulari motu orta partem unam è ponderis partibus 291 sustinebit & detrahet; & pondus 290 in altero



altero crure sustinebit partes reliquas. Res enim vera est non tantum in superficie Telluris, sed in omnibus utriusque cruris partibus, propter vim centrifugam & gravitatem partium inferiorum secundum distantias à centro proportionales ubique acceptas, eadem semper ratione in progressu ad centrum diminutas. Et calculum continuando, Fiet Gravitas in loco *Q* in Terram, ad gravitatem in loco *A* in Terram, ut 501 ad 500; & vis centrifuga $\frac{1}{290}$ efficiet ut altitudinis excessus in crure *ACca* sit altitudinis in crure altero *QCcq* pars $\frac{3}{689}=\frac{1}{230}$. sive in Tellure nostra ut semidiameter Terræ secundum æquatorem, ejusdem semiaxem sive semidiametrum per Polum exuperet milliaribus 17. Hæc inquam ita se habebunt ex hypothesi quod Terra ex uniformi materia constet. Nam si materia ad centrum paulo densior sit, uti certe esse debeat, quam ad superficiem, excessus altitudinis ad æquatorem erit paulo major; propterea quod si materia ad centrum redundans, qua densitas ibi major redditur, subducatur & seorsim spectetur, gravitas in terram reliquam uniformiter densam erit reciproce ut distantia ponderis à centro; in materiam vero redundantem reciproce ut quadratum distantiæ à materia illa quam proxime. Gravitas igitur sub æquatore minor erit in materiam illam redundantem quam pro superiore computo; & propterea Terra ibi, propter defectum gravitatis, paulo altius ascendet quam in præcedentibus est definitum. Jam vero Galli factis experimentis invenerunt quod pendulorum minutis singulis secundis oscillantium longitudo æquatorem versus minor sit eâ versus polos in majore ratione quam superior calculus postulat. Et propterea Terra videtur esse aliquanto altior sub æquatore quam pro calculo superiore, & densior ad centrum quam in fodinis prope superficiem; prout ratio omnino postulat.

Coroll. (1.) Si excessus gravitatis in locis circumpolaribus

laribus supra gravitatem ad æquatorem experimentis majori cura institutis accurate tandem determinetur, Determinabitur Mensura Universalis; ea nempe quæ penduli singulis minutis secundis in locis inter æquatorem & polos mediis oscillantis longitudinem accurate definiat. Unde tam Æquatio Temporis per æqualia pendula in locis diversis indicati, quam Proportio semidiametrorum Terræ, ac Densitatis ejus ad centrum, modo uniformiter crescere supponatur, una innotescent.

Coroll. (2.) Cum ratio sit eadem in canali aqua pleno ac in canali fluido quovis pleno, eadem etiam ac in Terra intus fluida, dum interea in Terra solida res aliter se habeat; Cum etiam notum sit per observata & experimenta, quod Terra nostra revera altior sit ad æquatorem quam ad polos, exinde constat aut Terram totam fluidam fuisse cum primum inciperet motus ejus diurnus, aut saltem ingens fluidum intus continuisse, quod cedendo partium ad Polos depressioni & ad æquatorem elevationi locum daret.

Coroll. (3.) Si retardaretur gradatim motus terræ diurnus, nisi ea fluidum interius contineat, quod figuræ mutationi locum dare possit, maria versus polos descenderent, ibique omnia inundarent.

Coroll. (4.) Si Planetæ majoris vel minoris, datæ tamen densitatis motus diurnus in ratione quacunque acceleretur vel retardetur, augebitur inde vel minuetur vis centrifuga in duplicata illa ratione; propter auctas inde vel diminutas tam curvaturam quam velocitatem in eadem illa ratione; & propterea Differentia semidiametrorum augebitur vel minuetur in eadem duplicata ratione. Sin densitas augeatur vel minuatur in ratione quacunque, propter gravitatem in eadem ratione auctam vel diminutam, differentia semidiametrorum minuetur vel augebitur in eadem illa ratione. Hoc est, Differentia semidiametrorum erit in ratione composita ex ratione Temporum Periodicorum duplicata, & ex ratione densitatis simplici, utraque reciproca. Unde cum dif-

ferentia ſemidiametrorum in Tellure ſit $\frac{3}{689}$ totius ſemidiametri, & Temporis periodici in Jove $9^h. 56'$. quadratum, ſit ad quadratum temporis periodici 24^h. in Tellure, ut 5 ad 29: & denſitas Jovis ſit ad denſitatem Telluris ut 76 ad 387. Differentia ſemidiametrorum Jovis, erit ad Differentiam ſemidiametrorum Telluris, ut $\frac{3 \times 29 \times 387}{689 \times 5 \times 76}$, ad 1. ſive ut $\frac{33669}{261820}$ ad 1. hoc eſt, ut 1 ad $8\frac{1}{2}$. Eſt ergo ſemidiameter æquatoris Jovis ad ſemiaxem ut $9\frac{1}{2}$ ad $8\frac{1}{2}$. Unde obiter mirum non eſt quod tanta differentia Obſervationi Aſtronomicæ pateat. Sed Notandum quod hæc ita ſe habent ubi uniformis eſt Planetæ denſitas. Sin Materia Jovis denſior ſit ad centrum quam ad circumferentiam, uti prius in genere obſervatum, differentia ſemidiametrorum erit adhuc major, & obſervatu facilior. Viderint itaque Obſervatores Aſtronomici, quam accurate hoc Corollarium cum Jovis diametris per micrometrum menſurandis conveniat.

XCIV. Incrementum ponderis pergendo ob æquatore ad polos eſt quam proxime ut Quadratum ſinus recti Latitudinis: ſive, quod perinde eſt, ut ipſi ſinus verſi Latitudinis.

Quoniam pondera inæqualium crurum canalis aqueæ *ACQqca* æqualia ſunt, & in æquilibrio poſita; & pondera partium ſimilium cruribus totis ſimiliter ſitarum ſunt ad invicem ut pondera totorum, adeoque etiam æquantur inter ſe, erunt pondera æqualium & in cruribus ſimiliter ſitarum partium reciproce ut crura. Et par eſt ratio homogeneorum & æqualium quorumvis & in canalis cruribus ſimiliter ſitorum corporum. Horum pondera ſunt reciproce ut crura, id eſt, reciproce ut diſtantiæ corporum à centro Terræ. Proinde, ſi corpora in ſupremis canalium partibus, ſive in ſuperficie Terræ conſiſtant, erunt pondera eorum ad invicem reciproce, ut diſtantiæ eorum à centro. Et eodem argumento pondera

dera in aliis quibuſcunque per totam Terræ ſuperficiem regionibus ſunt reciproce ut diſtantiæ locorum à centro: Et incrementum ponderis in Terra figuræ ſphæroidis oblatæ, quemadmodum demonſtravit Cl. Gregorius, ut quadratum ſinus recti Latitudinis loci; ſive, quod eodem redit, ut ſinus verſus Latitudinis quam proxime.

Aſtron. L. III. Prop. 52.

Vid. Prop. II. Coroll. 2. prius.

Corollarium. Cum itaque demonſtraverit etiam eodem in loco Gregorius longitudines pendulorum æquali tempore oſcillantium eſſe inter ſe ut diſtantiæ à centro Telluris reciproce, erit differentiæ longitudinis pendulorum ut quadratum ſinus recti latitudinis: atque ita ubique.

XCV. Motus inæquales Satellitum Jovis & Saturni motibus Lunæ inæqualibus ſunt plane ſimiles & analogi, & à cauſis ſimilibus & analogis oriuntur.

Motus nempe Nodorum in antecedentia, & Apſidum nunc in antecedentia tardius, nunc in conſequentia velocius, exceſſu vero motus poſterioris ſupra priorem in conſequentia. Motus etiam Variationis Satellitum & reliqui id genus eodem ſe habere debent modo in hiſce ſecundariis Planetis ac ſe habent in Luna, ſecundario pariter Planeta; ita ut eos hic loci ſeorſim tractare nullo modo ſit opus. Notandum tamen, parvitate harum inæqualitatum & tarditate motuum fieri ut motus Satellitum horum Circumjovialium & Circumſaturniorum præ motibus Lunæ conſimilibus ſumme regulares reperiantur; utque Aſtronomi recentiores aut motum omnem Nodis denegent, aut afferant tardiſſime retrogradum. Nam Cl. Flamſtedius collatis ſuis cum D. Caſſini obſervationibus nodos Satellitum Circumjovialium tarde regredi deprehendit, Nec dubitandum veniens ævum eccentricitates nonnullas, & apſidum progreſſus, nodos etiam, eorumque regreſſus cum reliquis motibus inæqualibus iis quæ apud Lunam adeo ſunt notabiles analogis certius & explicatius definiturum. Atque hæc impræſentiarum ſufficiant.

Maii 31°. 1708.

XXXVII.

XCVI. Fluxus & Refluxus Maris à gravitatione aquæ versus Solem & Lunam, sive ab attractionibus Solis & Lunæ oriuntur.

Mare singulis diebus tam Lunaribus quam Solaribus bis intumescere debere, ac bis defluere, ex prius demonstratis patet. Quod vero aquæ altitudo maxima in maribus profundis & liberis appulsum Luminarium ad meridianum loci non comitatur quidem, sed sequitur, idque trium circiter horarum spatio, hoc in loco accuratius paulo explicari debet. Quod ita se res habet liquet ex observatis æstibus marinis, tam apud Mare Atlanticum & Æthiopici tractum totum orientalem inter Galliam & Promontorium Bonæ spei, quam apud Maris Pacifici littus Chilense & Peruvianum; in quibus omnibus littoribus æstus maximus in horam circiter tertiam incidit; nisi ubi motus per loca vadosa propagatus aliquantulum retardatur. Ratio autem hujus rei hæc est: Ubi Luminare est in Meridiano, conatus sive vis attrahens ad maximam suam quantitatem pertigit, illico minuenda; effectus autem hujus vis maximæ nondum ad ἀκμὴν suam pertigit. Motus enim omnis semel impressus perseverat uniformiter, usque dum motus contrarius eundem destruit, aut saltem retardat. Unde sequitur fluxum maris, sive potius oceani per sex circiter horas antemeridianas, si ita etiam de Luna loqui liceat, adauctum, & cum motu diurno conspirando accceleratum, celeritate hac sua majore ulterius pergere debere, & aquas etiam magis magisque protrudendo accumulare, usque dum vis eadem contra motum diurnum postea tendendo motus istius pergentis cursum paulatim sistat & sufflaminet; & easdem aquas mox etiam tardiore gradu incedere & oceani refluxum fieri procuret. Quæ motus retardatio maxime circa octantes sive horam tertiam notabilis esse debet. Exempla hujus-

modi

modi effectuum maximorum post causas suas maximas aliquamdiu insequentium quotannis habemus in æstatis calore, hyemisque frigore, non in ipsis solstitiis æstivis hybernisque; sed circa octantes, ut ita dicam, vel sesquimensem abinde maxime intensis; & quotidie in diei calore summo, qui secunda aut tertia à meridie hora major est quam in ipso meridie; uti ex experentia indubia omnibus constare potest. Dum enim post vires maximas, & aquas inde maxime concitatas vires maximis proximæ & in partem contrariam vixdum conversæ etiamnum operentur, vires pauxillulum minores motibus à maximis concitatis & vi insita pergentibus superadditæ majorem illico effectum ut sortiantur est necesse, quam vires usque crescentes motibus minoribus superadditæ sortiri queant. Deinde notandum, vires ipsas attractrices, aquas directe sursum attrahentes, à maxima sua quantitate per horam unam vel etiam alteram postmeridianam vixdum quoad sensum deficere, licet directio attractionis aquas accelerantis vel retardantis in ipso meridiano ad limitem pertingat; & ibidem speciem mutet. Eo itaque in loco aquæ maxime in cumulum assurgent, ubi partes meridianum nuperrime cum velocitate summa prætergressæ in partes alteras ad quadraturam prius summe retardatas incidant, & ita mutuo conatu occurrentes fluxum omnium maximum efficiant, quod circa horam tertiam accidere est apertissimum. Horas enim hoc in loco non vulgares tantum, quod probe notandum, numeramus; sed eas quæ ab appulsu Solis aut Lunæ ad meridianum loci tam infra horizontem quam supra fluunt, & per Horas diei Lunaris intelligimus vigesimas quartas partes temporis quo Luna motu apparente diurno ad meridianum loci cujuslibet revolvitur.

XCVII. Fluxus & refluxus maris, tam à vi Solis quam à vi Lunæ seorsim dependentes, non æstum duplicem sed unicum ex virium conjunctione æstimandum procurabunt:

Quemadmodum enim corpus quodvis duplici vi concitatum in lineis duabus pergere nequit, ſed ex conjunctis viribus in parallelogrammi diagonali eodem modo pergit ac ſi vi unica juxta diagonalis directionem concitatum eſſet; ita quidem pari ratione motus hi bini quos luminaria hæc duo excitant non cernentur diſtincte, ſed motum quendam mixtum efficient. In luminarium conjunctione & oppoſitione conjungentur eorum effectus, & componetur fluxus & refluxus maximus, è virium nimirum *ſumma* tum temporis oriundi. In luminarium quadraturis Sol attollet aquam, ubi Luna deprimit, deprimetque, ubi Luna attollit; & æſtus omnium minimus, è virium nimirum *differentia* tum oriundus, obſervabitur. Et quoniam, experientia teſte, multo major eſt effectus Lunæ quam Solis, incidet aquæ maxima altitudo in horam tertiam Lunarem. Extra ſyzygias vero & quadraturas æſtus maximus, qui ſola vi Lunari incidere ſemper deberet in horam tertiam Lunarem, & ſola vi Solari in tertiam Solarem, compoſitis viribus incidet in tempus aliquod intermedium, quod tertiæ Lunari multo propinquius erit quam tertiæ Solari; adeoque in tranſitu Lunæ à ſyzygiis ad quadraturas, ubi Hora tertia Solaris præcedit tertiam Lunarem, maxima aquæ altitudo præcedet etiam tertiam Lunarem; idque maximo intervallo paulo poſt octantes Lunæ. Et paribus intervallis æſtus maximus ſequetur horam tertiam Lunarem in Tranſitu Lunæ à quadraturis ad ſyzygias, idque etiam maximo intervallo paulo poſt octantes Lunæ. Hæc nempe omnia in Oceano ſive aperto mari. Nam in Fluviorum Oſtiis fluxus majores cæteris paribus majus tempus requirent, atque ita tardius paulo ad ἀκμὴν ſuam pervenient.

XCVIII. Æſtus marinus propter diverſas luminarium diſtantias à terra tum per ſingulos annos, tum per ſingulos menſes diverſus eſſe debet; idque in triplicata diſtantiarum iſtarum ratione reciproca, ſive in triplicata diametrorum apparentium ratione directa.

Hoc

Hoc olim ſuo loco demonſtratum dedimus. Neque mirum certe hoſce & hujuſmodi effectus in minoribus diſtantiis majores, in majoribus minores eſſe. Quocirca Sol tempore hyberno circa Perigæon poſitus majores edet effectus, efficietque ut æſtus poſt ſyzygias paulo majores ſint, ob majorem virium *Summam*, & poſt quadraturas paulo minores, ob minorem virium *Differentiam*, quam æſtivo tempore; cæteris nimirum paribus. Et Luna poſt Perigæon ſingulis menſibus majores ciebit æſtus quam ante vel poſt quindecim dies, ubi in Apogæo verſatur. Unde ſi ſitus Lunæ Perigæus circa conjunctionem accidat, augebitur æſtus diurnus, minuetur nocturnus: ſin ſitus iſte circa oppoſitionem accidat, augebitur nocturnus, minuetur diurnus. Unde etiam fit ut æſtus duo omnino maximi poſt ſyzygias continuas ſe mutuo non ſequantur. Si enim Luna in ſyzygiarum altera ſit circa Perigæon, & æſtum maximum conjunctis cum Sole viribus tum temporis concitet; in altera circa Apogæon verſetur, & minores vires poſſideat eſt neceſſe.

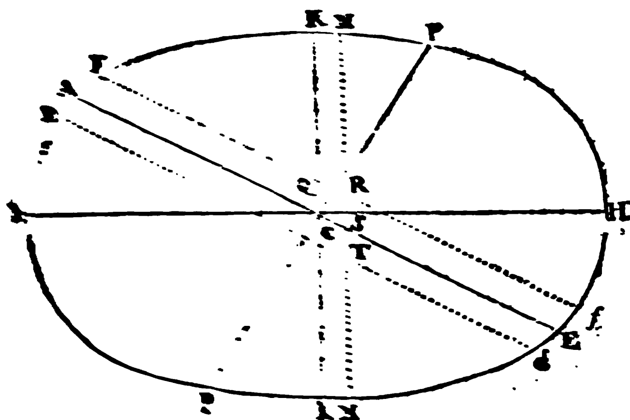
XCIX. Æſtus marini reciprocationes, ſive fluxus & refluxus propter diverſam Luminarium ab æquatore declinationem, tum per ſingulos annos, tum per ſingulos menſes diverſi eſſe debent.

Si enim Luminare in polo utrovis aut utroque conſtitueretur, traheret illud ſingulas aquæ partes conſtanter, abſque actionis intenſione & remiſſione: adeoque nullam motus *reciprocationem* cieret. Igitur Luminaria recedendo ab æquatore polum verſus alterutrum effectus ſuos gradatim amittent, & propterea minores ciebunt æſtus poſt ſyzygias Solſtitiales quam poſt Æquinoctiales. Poſt quadraturas autem Solſtitiales majores evadent æſtus quam poſt quadraturas Æquinoctiales, eo quod Lunæ jam circa æquatorem conſtitutæ effectus maxime ſuperat effectum Solis. Incidunt igitur æſtus maximi poſt ſyzygias, & minimi poſt quadraturas Luminarium, utraſque nimirum Æquinoctiales; & æſtum

maximum post syzygias comitatur semper minimus post quadraturas; ut experientia testatur. Per minorem autem distantiam Solis à Terra tempore hyberno quam aestivo fit ut aestus maximi & minimi saepius praecedant aequinoctium vernum quam sequantur; & saepius sequantur autumnale quam praecedant.

C. Aestus marini Phaenomena nonnulla & Luminarium effectus ex diversa locorum in Tellure Latitudine diversi sunt; & praecipue quidem quoad Diurnos & Nocturnos aestus, se invicem immediate consecutos.

Designet circulum *ApEP* Tellurem, aquis si placet profundis undique coopertam. *C* centrum ejus *P.p.* Polos. *A E.* aequatorem. *F* locum quemvis extra aequatorem.



aequatorem. *Ff* parallelum loci. *Dd* parallelum ei respondentem ex altera parte aequatoris. *H* locum Telluris in quo Luna tribus ante Horis occupabat [illegible], sive punctum medium aquae maxime elevatae. *h* locum huic oppositum, sive punctum medium aquae ex altera Telluris parte maxime elevatae. *K, k* loca inde gradibus 90 distantia. *CH, Ch* Maris altitudines maximas à Telluris centro mensuratas.

ſuratæ. & *CK*, *Ck* altitudines minimas. Et ſi axibus *Hh*, *Kk* deſcribatur Ellipſis, deinde Ellipſeos hujus revolutione circa axem majorem *Hh* deſcribatur Sphærois *HPKbpk*, deſignabit hæc figuram maris quam proxime, & erunt *CF*, *Cf*; *CD*, *Cd*, altitudines Maris in locis *F*, *f* & *D*, *d*. Quinetiam ſi in præfata Ellipſeos revolutione punctum quodvis *N*, deſcribat circulum *NM*, ſecantem parallelos *Ff*, *Dd* in locis quibuſvis *R*, *T*, & æquatorem *AE* in *S*, erit *CN* altitudo Maris in locis omnibus *R*, *S*, *T* ſitis in hoc circulo. Hinc in diurna revolutione loci cujuſvis *F*, affluxus erit maximus in *F* hora tertia poſt appulſum Lunæ ad Meridianum ſupra Horizontem; poſtea defluxus maximus in *Q* hora tertia poſt occaſum Lunæ; dein affluxus maximus in *f* hora tertia poſt appulſum Lunæ ad meridianum infra Horizontem, ultimo defluxus maximus in *Q* hora tertia poſt ortum Lunæ, & affluxus poſterior in *f* erit minor quam affluxus prior in *F*. Diſtinguitur enim totus Oceanus in duos omnino fluctus hemiſphæricos, unum in hemiſphærio *KHkC*, ad Boream, alterum in hemiſphærio oppoſito ad Auſtrum vergente, *KhkC*. quos igitur *Fluctum Borealem*, & *Fluctum Auſtralem* nominare licet. Hi fluctus ſemper ſibi mutuo oppoſiti veniunt per vices ad meridianos locorum ſingulorum; interpoſito nempe intervallo horarum Lunarium quaſi duodecim. Cumque regiones boreales magis participant fluctum borealem, & Auſtrales magis Auſtralem, inde oriuntur æſtus alternis vicibus majores & minores in locis ſigulis extra æquatorem. Æſtus autem major Luna in verticem loci declinante incidet in horam circiter tertiam poſt appulſum Lunæ ad meridianum ſupra horizontem; &, Luna declinationem mutante, & in partes à vertice remotiores concedente, vertetur in minorem. Et fluxuum differentia maxima hac de cauſa incidet in tempora Solſtitiorum: præſertim ſi Lunæ nodus aſcendens verſetur in principio Arietis: ut ita Luna & vertici proxima, & ab

eodem remotissima eadem revolutione diurna pertranseat. Sic sane experientia compertum est æstus matutinos hyberno tempore vespertinos, & vespertinos æstivo tempore matutinos superare; nimirum ad Plimuthum quidem altitudine pedis unius, ad Bristoliam vero altitudine quindecim digitorum, Observantibus Colepressio & Sturmio. Quod vero differentiæ hæ non tantæ videntur quantæ in regionibus adeo ab æquatore remotis, jure posset ex hac causa expectari, ex alia sane causa oriri potest. Motus enim hactenus descripti mutantur aliquantulum per vim illam reciprocationis aquarum, qua maris æstus, etiam cessantibus Luminarium actionibus, posset aliquamdiu perseverare. Conservatio hæc motus semel impressi minuit differentiam æstuum alternorum, & æstus proxime post syzygias majores reddit; eosque proxime post quadraturas minuit. Hinc enim fit ut æstus alterni ad Plimuthum & Bristoliam non multo magis differant quam altitudine pedis unius vel digitorum quindecim; utque æstus omnium maximi in iisdem portubus non sint primi à syzygiis, sed tertii; quod cum prius dictis adprime convenit. Retardantur etiam motus omnes in transitu per vada, adeo ut æstus omnium maximus in fretis quibusdam & fluviorum ostiis sint quarti vel etiam quinti à syzygiis. Verum hæc hactenus.

Novemb. 8°. 1708.

XXXVIII.

CI. FLuxus Oceani & Refluxus Phænomena in locis particularibus, fretis nimirum, portubus, fluviorum ostiis, maribus parvis, & cum oceano aut non omnino aut parum communicantibus; in iis etiam quæ longe ab æquatore distant; à generali æstus marini

lege

lege haud parum recedunt, & à particularibus locorum circumstantiis plerumque dependent. Exempli gratia; Fieri potest ut æstus propagetur ob Oceano per freta diversa ad eundem portum, & citius transeat per aliqua freta quam per alia: quo in casu æstus idem in duos vel plures successive advenientes divisus, componere potest motus novos diversorum generum: Fieri etiam potest ut aut itineris longinquitate, aut flexuoso situ, aut obstaculorum impedimentis æstus sistatur fere, & minuatur. (Unde ubi plures Insulæ, ut in Moluccis, Philippinis, in sinu Mexicano, in Antillis, aut nullus fere aut longe minor est æstus quam in patente & libero oceano.) Fieri potest ut æstus in oceano mediocris, in fluviis evadat maximus, propter transitus angustias nimirum, & littorum sensim coeuntium convergentiam. In maribus etiam parvis nullus erit aut plane contemnendus aquarum motus. Cum enim æstus maximus in oceano tantum profundo, per gradus 90 in orientem & occidentem patente, accidere debet; quo minus est mare, eo minor ut sit aquarum acceleratio & retardatio, hoc est, minor fluxus & refluxus, est necessum: nisi saltem mare cum Oceano ipso libere communicet. Si enim nihil aut parum cum Oceano communicet, uti fit in Mediterraneo, æstus quoque eam ob causã minor expectabitur. In iis etiam maribus quæ longe à partibus æquatoreis, ubi æstus maxime propagari debet, distant; præsertim si cum Oceano quoque ægre communicent, minimus erit aquarum æstus, uti fit in Mari Baltico & Septentrionali. Quod etiam fit in maribus Euxino atque Caspio; non tantum ob situm paulo borealiorem, & minimam aut nullam cum Oceano communicationem, sed ob marium horum etiam parvitatem. In maribus quæ ab oriente in occidentem late patent, uti in mari Pacifico, & Maris Atlantici & Æthiopici partibus extra Tropicos, aqua attolli solet ad altitudinem pedum 6. 9. 12. vel 15. In mari autem Pacifico, quod profundius est, & latius patet, æstus dicuntur esse majores quam in Atlantico

lantico & Æthiopico. In mari Æthiopico ascensus aquæ intra Tropicos minor est quam in Zonis Temperatis, propter angustiam maris inter Africam & Australem partem Americæ. In medio mari aqua nequit ascendere nisi ad littus utrumque & orientale & occidentale simul descendat; cum tamen vicibus alternis ad littora illa in maribus nostris angustis descendere debeat. Ea de causa refluxus & fluxus in Insulis quæ à littoribus longissime absunt perexiguus esse solet. In portubus quibusdam, quod nuperrime observatum, ubi aqua impetu magno per loca vadosa ad sinus angustos alternis vicibus implendos & evacuandos influere & effluere cogitur, fluxus & refluxus sunt solito majores; uti ad Plimuthum, & Pontem Chepstowæ, in Anglia; ad montes S^ti^ Michaelis, & Urbem Abrincatuorum (vulgo Auranches) in Normania; ad Cambaiam & Pegu, in India Orientali. His in locis mare magna cum velocitate accedendo & recedendo littora nunc inundat, nunc arida relinquit ad multa milliaria. Neque impetus influendi & remeandi prius frangi potest quam aqua attollitur vel deprimitur ad pedes 30. 40. 50. aut interdum 60. Et par est ratio fretorum oblongorum, & vadosorum, & angustorum, uti Magellanici, & ejus quo Anglia circundatur. Æstus in hujusmodi portubus & fretis per impetum cursus & recursus supra modum augetur. Ad Littora vero, quæ descensu præcipiti ad mare profundum & apertum spectant, ubi aqua sine impetu effluendi & remeandi attolli libere & subsidere potest, æstus ad 12. circiter pedum altitudinem, si quantitatem generalem mediocrem definire placeat, consurgere est censendus; mensurando nimirum ab ima aquarum refluentium depressione, ad summam affluentium altitudinem. Omnium autem æstuum marinorum maxime mirandus ille est, quem Cl. Halleius nostras ex Nautarum Observationibus patefecit in Portu Regni Tunquini ad Batsham, sub latitudine boreali 20°. 50′. Ibi aqua die transitum Lunæ per æquatorem

rem sequente stagnat; dein Luna ad boream declinante incipit fluere & refluere; non bis, ut in aliis portubus; sed semel singulis diebus; & affluxus maximus incidit in occasum Lunæ, defluxus maximus in ortum; cum Lunæ declinatione augetur hic æstus, usque ad diem septimum vel octavum; dein per alios septem dies iisdem gradibus decrescit quibus antea creverat: &, Luna declinationem mutante, cessat; ac mox mutatur in defluxum. Incidit enim subinde defluxus in occasum Lunæ, & affluxus in ortum, donec Luna iterum mutet declinationem. Aditus ad hunc Portum fretaque vicina duplex patet, alter ab oceano Sinensi, inter continentem & Insulam Luconiam; alter à mari Indico inter continentem & Insulam Borneo. Verisimile videtur æstus duos fere æquales à diversis istis oceani æstibus in hunc portum venire, quorum prior præcedat alterum spatio horarum sex, incidatque in horam tertiam ab appulsu Lunæ ad meridianum portus. Ubi Luna in hocce suo ad meridianum appulsu versatur in æquatore, venient singulis horis senis æquales affluxus, qui in mutuos refluxus incidendo eosdem affluxibus æquabunt; & sic spatio diei illius efficient, ut aqua nullo æstu cieri videatur. Ubi Luna declinat ab æquatore, fient æstus in Oceano vicibus alternis majores & minores, uti in Propositione penultima explicuimus; & inde propagabuntur in hunc portum affluxus bini majores, & bini minores vicibus alternis. Affluxus autem bini majores aquas suas conjungendo component affluxum altissimum medio inter utrumque tempore: affluxus major & minor faciet ut aqua ascendat ad mediocrem altitudinem medio ipsorum tempore, & inter affluxus binos minores aqua ascendet ad altitudinem minimam. Sic spatio 24. horarum Lunarium aqua non bis, ut in aliis locis fieri solet, sed semel tantum perveniet ad maximam altitudinem, & semel ad minimam; & altitudo maxima, ubi Luna declinat in polum supra Horizontem loci, incidet in horam sextam ab appulsu Lunæ ad meridianum;

atque, Luna declinationem mutante, mutabitur in defluxum. Æstus itaque alter spatio horarum 12. à mari Indico, & alter spatio horarum 6. à mari Sinensi per freta illa prius memorata venientes, & sic in horam tertiam & nonam Lunarem incidentes, anomalos hos aquarum æstus componere videntur. Sed Hæc & hujusmodi particularia phænomena vicinorum littorum & marium observationibus sunt ubique relinquenda.

Scholium. Si calculi Newtoniani ambages refugiamus, & virium quantitates solas rescire velimus, sic statuendum. Summa virium Solarium tam in deprimendis aquis in regionibus quæ 90. gradibus distant à Sole, quam in elevandis in regionibus sub Sole & Soli oppositis, si conjunctim sumantur; sive vires totæ Solares ad agitandum mare se habent ad vim gravitatis apud nos, ut 1, ad 12.868.200. Cum autem vis centrifuga partium Terræ à diurno ejusdem motu oriunda, quæ est ad vim gravitatis ut 1, ad 291, efficiat ut altitudo aquæ sub æquatore superet ejus altitudinem sub polis mensura pedum Parisiensium 85.200. Vis Solaris, de qua jam agimus, cum sit ad vim gravitatis ut 1 ad 12.868.200, atque adeo ad vim illam centrifugam ut 291 ad 12.868.200, seu 1 ad 44.221, efficiet ut altitudo aquæ in regionibus sub Sole & Soli oppositis, superet altitudinem ejus in locis quæ 90. gradibus distant à Sole, mensura tantum pedis unius Parisiensis, & digitorum undecim: nempe juxta hanc analogiam, 44.221 : 1 : : 85.200 : $1\frac{11}{12}$. Vires autem Lunæ ad mare movendum, quæ hic principalem locum obtinent, ex earundem ad solares ratione deducendæ sunt; & per effectus sive motuum in syzygiis *summas*, in quadraturis *differentias* dignoscendæ: sunt autem Vires Lunæ ex hoc calculo, ad Vires Solis, ex collatis observationibus ut $6\frac{1}{3}$, ad 1 quam proxime; sive numero rotundo Secuplæ.

Coroll. (1.)

Coroll. (1.) Cum igitur, ut prius vidimus, Vires Solis aquam ad altitudinem duorum fere Pedum elevare debeant, Vires Lunæ paulo plusquam secuplæ Solarium aquam ad altitudinem pedum 12. elevare debent: & Vires Lunares & Solares conjunctim in syzygiis eandem ad pedes 14, in quadraturis ad pedes 10. elevabunt. Tanta autem vis ad omnes maris motus excitandos abunde sufficit; & motuum quantitati prius definitæ probe respondet; & tam probe respondendo æstuum causam recte hic assignatam esse plane confirmat.

Coroll. (2.) Cum vis Lunæ ad mare movendum sit ad vim gravitatis, ex prius demonstratis, tantum ut 1, ad 2.031.821; perspicuum est quod vis illa sit longe minor quam quæ vel in Experimentis Pendulorum, vel in Staticis, aut Hydrostaticis quibuscunque sentiri possit. In æstu marino solo hæc vis sensibilem effectum edere potest.

Coroll. (3.) Quoniam Vis Lunæ ad mare movendum, est ad Solis vim consimilem ut $6\frac{1}{3}$ ad 1; & vires illæ sunt ut densitates corporum, sive quantitates materiæ æquali spatio contentæ, & ut cubi distantiarum sive diametrorum conjunctim: ipsa enim corpora æque densa sunt ut cubi diametrorum verarum directe, ad eandem nempe distantiam: & vires motrices in hoc casu sunt etiam ut cubi distantiarum reciproce, sive ut diametrorum apparentium cubi directe; atque adeo perinde est sive Sol propius sit sive remotius, sive major sit sive minor, modo diameter apparens certa sit ac determinata. Erit itaque densitas Lunæ, ad densitatem Solis, ut effectus; sive ut $6\frac{1}{3}$, ad 1; & ut Cubus diametri apparentis Lunæ, ad Cubum diametri apparentis Solis, hoc est, ut $6\frac{1}{3}$ ad 1; & ut 720, ad 672 conjunctim $= 6\frac{1}{3} \times 720$ ad 1×672. sive ut 34 ad 5. fere. densitas autem Solis est ad densitatem Terræ, ut 100 ad 387. Erit itaque densitas Lunæ, ad densitatem Terræ, ut 9 ad 5 quam proxime: sive fere dupla. Est igitur corpus

corpus Lunæ fere duplo densius, &, ut ita dicam, terrestrius quam Terra nostra; uti olim anticipando exposuimus.

Coroll. (4.) Unde cum vera Lunæ diameter, sit ad veram Terræ diametrum, ut 5 ad 18, sive ut 1 ad 3,65: erit massa Lunæ, ad massam Terræ, ut istorum numerorum Cubi, cum densitatis ratione compositi; sive ut 1 × 9 ad 49 × 5. hoc est, ut 1 ad 26, quam proxime.

Coroll. (5.) Gravitas acceleratrix, sive corporum æqualium pondus in superficie Lunæ, erit ut quantitas materiæ in Lunæ, ad quantitatem materiæ in Terra, cum duplicata distantiarum à centris ratione reciproca composita; hoc est, ut 1 × 13, ad 26 × 1, sive duplo minor quam gravitas acceleratrix in superficie Terræ, uti olim quoque anticipando docuimus.

CII. Figura corporis Lunaris (abstrahendo nimirum ab elevatione partium æquatorearum & depressione polarium, à motu ipsius diurno pendentium,) est aliquantulum Ovalis vel Sphæroidis oblongæ; cujus axis maximus productus per centrum terræ transit; & superat axes minores eidem normales excessu pedum 180 circiter. Si corpus Lunare fluidum esset ad instar maris nostri, vis Terræ ad fluidum illud in partibus citimis & remotissimis elevandum, esset ad vim Lunæ, qua mare nostrum in partibus & sub Luna & iisdem oppositis attollitur, ut Vis attrahens Terræ, ad vim attrahentem Lunæ; sive ut quantitas materiæ in Terra, ad quantitatem materiæ in Luna, ob æquales nempe distantias; nisi quatenus minor Lunæ diameter eandem rationem demutat. Est ergo Vis illa tota in ratione composita ex 26 ad 1, & 5 ad 18; sive ut 26 × 5 ad 1 × 18: hoc est, ut 69 ad 9. Unde cum mare nostrum ex prius demonstratis attollatur vi Lunæ ad pedes 12, Fluidum Lunare vi Terræ attolli deberet ad pedes fere 90. Eaque de causa figura Lunæ sphæroïs esset, cujus maxima diameter sive axis major productus

ductus per centrum Terræ transiret, & superaret diametros sive axes perpendiculares excessu pedum circiter 180. Talem igitur figuram Luna affectat, eamque sub initio induere debuit.

Corollarium. Inde vero forte fit ut eadem Lunæ facies directius quam alias oporteret in Terram obvertatur. In alio enim situ corpus Lunare quiescere non potest, sed ad hunc situm oscillando semper redibit. Attamen Oscillationes, ob parvitatem virium in tantillo axis majoris supra minores excessu, essent longe tardissimæ, adeo ut facies illa quæ Terram semper respicere deberet possit alterum Orbis Lunaris umbilicum, ob motus angularis circa ipsum æquabilitatem, respicere, uti prius expositum; neque statim abinde retrahi & in Terram converti.

CIII. Cometæ sunt Luna superiores, & in regione Planetarum Primariorum versantur.

CIV. Cometæ in sectionibus Conicis, Umbilicos in centro Solis habentibus, moventur; & radiis ad Solem ductis areas temporibus quidem æqualibus æquales, & in universum temporibus semper proportionales describunt.

CV. Cometarum corpora sunt solida, compacta, fixa, ac durabilia, ad instar corporum Planetarum; ingentibus autem atmosphæris plerumque cinguntur; & caudis nunc brevioribus nunc vero longioribus, ex iisdem in Solis vicinia natis, semper ornantur.

Hæ Propositiones Cometographiam Newtonianam continent, quatenus ad nostrum institutum Universam. Illæ autem tam clare & plene ab ipso Authore proponuntur & explicantur, ut nostro commentario minime indigeant. Manum itaque de tabula.

Novemb. 15°. 1708.

[Quæ sequuntur, è Newtono verbatim descripsimus.]

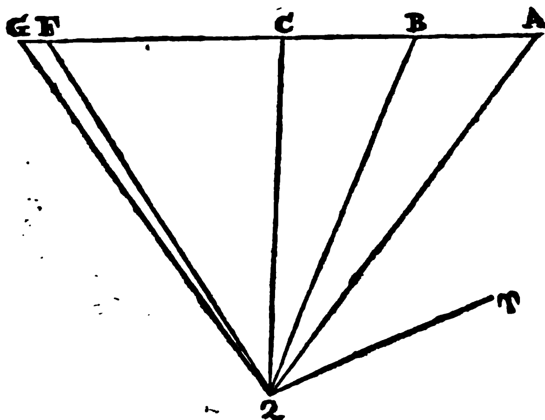
Cometas

Cometas esse Lunâ superiores, & in regioni Planetarum versari.

UT defectus Parallaxeos diurnæ extulit Cometas supra regiones sublunares, sic ex Parallaxi annua convincitur eorum descensus in regiones Planetarum. Nam Cometæ qui progrediuntur secundum ordinem signorum sunt omnes, sub exitu apparitionis, aut solito tardiores aut retrogradi, si Terra est inter ipsos & Solem; at justo celeriores si Terra vergit ad oppositionem. Et è contra, qui pergunt contra ordinem signorum sunt justo celeriores in fine apparitionis, si Terra versatur inter ipsos & Solem; & justo tardiores vel retrogradi si Terra sita est ad contrarias partes. Contingit hoc maxime ex motu Terræ in vario ipsius situ, perinde ut fit in Planetis, qui, pro motu Terræ vel conspirante, vel contrario, nunc retrogradi sunt, nunc tardius moveri videntur, nunc vero celerius. Si Terra pergit ad eandem partem cum Cometa, & motu angulari circa Solem celerius fertur, Cometa è Terra spectatus, ob motum suum tardiorem, apparet esse retrogradus; sin Terra tardius fertur, motus Cometæ, (detracto motu Terræ) fit saltem tardior. Ac si Terra pergit in contrarias partes, Cometa exinde velocior apparet. Ex acceleratione autem vel retardatione vel motu retrogrado distantia Cometæ in hunc modum colligitur. Sunto ♈ *QA*, ♈ *QB*, ♈ *QC* observatæ tres longitudines Cometæ, sub initio motus, sitque ♈ *QF* longitudo ultimo observata, ubi Cometa videri desinit. Agatur recta *ABC*, cujus partes *AB*, *BC* rectis *QA* & *QB*, *QB* & *QC* interjectæ, sint ad invicem ut tempora inter observationes tres primas. Producatur *AC* ad *G*, ut sit *AG* ad *AB* ut tempus inter observationem primam & ultimam, ad tempus inter observationem primam & secundam; & jungatur *QG*. Et si Cometa moveretur uniformiter in linea

atque

recta, atque Terra vel quiesceret, vel etiam in linea recta, uniformi cum motu, progrederetur; foret angulus ♈ *QG* longitudo Cometæ tempore Observationis ultimæ. Angulus igitur *FQG*, qui longitudinum differentia est, oritur ab inæqualitate motuum Cometæ ac Terræ. Hic autem angulus, si Terra & Cometa in contrarias partes moventur, additur angulo *AQG*, & sic motum apparentem Cometæ velociorem reddit: Sin Cometa pergit in easdem partes cum Terra, eidem subducitur, motumque Cometæ vel tardiorem reddit, vel forte retrogradum; uti modo exposui. Oritur igitur hic an-



gulus præcipue ex motu Terræ, & idcirco pro parallaxi Cometæ merito habendus est, neglecto videlicet ejus incremento vel decremento nonnullo, quod à Cometæ motu inæquabili in orbe proprio oriri possit. Distantia vero Cometæ ex hac parallaxi sic colligitur. Designet *S* Solem, *acT* orbem magnum, *a* locum Terræ in observatione prima, *c* locum Terræ in observatione secunda, *T* locum Terræ in observatione ultima, & *T*♈ lineam rectam versus principium Arietis ductam.

Sumatur angulus ♈ *TV* æqualis angulo ♈ *QF*, hoc est, æqualis longitudini Cometæ ubi Terra versatur in *T*. Jungatur *ac*, & producatur ea ad *g*, ut sit *ag* ad *ac*, ut *AG* ad *AC*, & erit *g* locus quem Terra tempore observationis ultimæ, motu in recta *ac* uniformiter continuato, attingeret. Ideoque si ducatur *g* ♈ ipsi *T* ♈ parallela, & capiatur angulus ♈ *gV* angulo ♈ *QG* æqualis, erit hic angulus ♈ *gV* æqualis longitudini Cometæ è loco *g* spectati; & angulus *TVg* parallaxis erit, quæ oritur à translatione Terræ de loco *g* in locum *T*: ac proinde *V* locus erit Cometæ in plano Eclipticæ. Hic autem locus *V* orbe Jovis inferior esse solet.

Idem colligitur ex curvatura viæ Cometarum. Pergunt hæc corpora propemodum in circulis maximis quamdiu moventur celerius; at in fine cursus, ubi motus apparentis pars illa quæ à parallaxi oritur majorem ha-

bet proportionem ad motum totum apparentem, deflectere solent ab his circulis, & quoties Terra movetur in unam partem abire in partem contrariam. Oritur hæc deflexio maxime ex Parallaxi, propterea quod respondet motui Terræ; & insignis ejus quantitas meo computo collocavit disparentes Cometas satis longe infra Jovem. Unde consequens est quod in Perigæis & Periheliis, ubi propius adsunt, descendunt sæpius infra orbes Martis & inferiorum Planetarum.

Confirmatur etiam propinquitas Cometarum ex luce capitum. Nam corporis cœlestis à Sole illustrati & in regiones longinquas abeuntis diminuitur splendor in quadruplicata ratione distantiæ: in duplicata ratione videlicet ob auctam corporis distantiam à Sole, & in alia duplicata ratione ob diminutam diametrum apparentem. Unde si detur & lucis quantitas, & apparens diameter Cometæ, dabitur distantia, dicendo quod distantia sit ad distantiam Planetæ in ratione integra diametri ad diametrum directe, & ratione dimidiata lucis ad lucem inverse. Sic minima Capillitii Cometæ anni 1682 diameter, per Tubum opticum sexdecim pedum à Cl. Flamstedio observata & micrometro mensurata, æquabat 2'. 0''. Nucleus autem seu stella in medio capitis vix decimam partem latitudinis hujus occupabat, adeoque lata erat tantum 11'' vel 12''. Luce vero & claritate capitis superabat caput Cometæ anni 1680, stellasque primæ vel secundæ magnitudinis æmulabatur. Ponamus Saturnum cum annulo suo quasi quadruplo lucidiorem fuisse: & quoniam lux annuli propemodum æquabat lucem globi intermedii, & diameter apparens globi sit quasi 21'', adeoque lux globi & annuli conjunctim æquaret lucem globi, cujus diameter esset 30'': erit distantiæ Cometæ ad distantiam Saturni ut 1 ad $\surd 4$ inverse, & 12'' ad 30'' directe, id est, ut 24 ad 30 seu 4 ad 5. Rursus Cometa anni 1665 mense Aprili, ut Author est Hevelius, claritate sua pene fixas omnes superabat, quinetiam ipsum Saturnum, ratione coloris vide-

licet longe vividioris. Quippe lucidior erat hic Cometa altero illo, qui in fine anni præcedentis apparuerat, & cum ſtellis primæ magnitudinis conferebatur. Latitudo capillitii erat quaſi 6′, at nucleus cum Planetis ope Tubi optici collatus, plane minor erat Jove, & nunc minor corpore intermedio Saturni, nunc ipſi æqualis judicabatur. Porro cum diameter Capillitii Cometarum raro ſuperet 8′ vel 12′, diameter vero Nuclei ſeu ſtellæ centralis ſit quaſi decima vel forte decima quinta pars diametri capillitii, patet Stellas haſce ut plurimum ejuſdem eſſe apparentis magnitudinis cum Planetis. Unde cum lux eorum cum luce Saturni non raro conferri poſſit, eamque aliquando ſuperet; manifeſtum eſt quod Cometæ omnes in Periheliis vel infra Saturnum collocandi ſint, vel non longe ſupra. Errant igitur toto cœlo qui Cometas in regionem Fixarum prope ablegant: qua certe ratione non magis illuſtrari deberent à Sole noſtro, quam Planetæ, qui hic ſunt, illuſtrantur à Stellis fixis.

Hæc diſputavimus non conſiderando obſcurationem Cometarum per fumum illum maxime copioſum & craſſum, quo caput circundatur, quaſi per nubem obtuſe ſemper lucens. Nam quanto obſcurius redditur corpus per hunc fumum, tanto propius ad Solem accedat neceſſe eſt, ut copia lucis à ſe reflexa Planetas æmuletur. Inde veriſimile fit Cometas longe infra Sphæram Saturni deſcendere, uti ex Parallaxi probavimus. Idem vero quam maxime confirmatur ex Caudis. Hæ vel ex reflexione fumi ſparſi per æthera, vel ex luce capitis oriuntur. Priore caſu minuenda eſt diſtantia Cometarum, ne fumus à Capite ſemper ortus per ſpatia nimis ampla incredibili cum velocitate & expanſione propagetur. In poſteriore referenda eſt lux omnis tam caudæ quam capillitii ad Nucleum capitis. Igitur ſi imaginemur lucem hanc omnem congregari & intra diſcum Nuclei coarctari, Nucleus ille jam certe, quoties caudam maximam & fulgentiſſimam emittit, Jovem ipſum
ſplen-

ſplendore ſuo multum ſuperabit. Minore igitur cum diametro apparente plus lucis emittens, multo magis illuſtrabitur à Sole, adeoque erit Soli multo propior. Quinetiam capita ſub Sole deliteſcentia, & caudas cum maximas tum fulgentiſſimas inſtar trabium ignitarum nonnunquam emittentia, eodem argumento infra orbem Veneris collocari debent. Nam lux illa omnis ſi in ſtellam congregari ſupponatur, ipſam Venerem, ne dicam Veneres plures conjunctas quandoque ſuperaret.

Idem denique colligitur ex luce capitum creſcente in receſſu Cometarum à Terra Solem verſus, ac decreſcente in eorum receſſu à Sole verſus Terram. Sic enim Cometa poſterior Anni 1665 (obſervante Hevelio,) ex quo conſpici cœpit, remittebat ſemper de motu ſuo, adeoque præterierat Perigæum; Splendor vero capitis nihilominus indies creſcebat, uſque dum Cometa radiis Solaribus obtectus deſiit apparere. Cometa Anni 1683, obſervante eodem Hevelio, in fine Menſis Julii ubi primum conſpectus eſt, tardiſſime movebatur, minuta prima 40 vel 45 circiter ſingulis diebus in orbe ſuo conficiens. Ex eo tempore motus ejus diurnus perpetuo augebatur uſque ad Sept. 4. quando evaſit graduum quaſi quinque. Igitur toto hoc tempore Cometa ad Terram appropinquabat. Id quod etiam ex diametro capitis micrometro menſurata colligitur: quippe quam Hevelius reperit Aug. 6. eſſe tantum 6′. 5″. incluſa coma, at Sept. 2. eſſe 9′. 7″. Caput igitur initio longe minus apparuit quam in fine motus, at initio tamen in vicinia Solis longe lucidius extitit quam circa finem, ut refert idem Hevelius. Proinde toto hoc tempore, ob receſſum ipſius à Sole, quoad lumen decrevit, non obſtante acceſſu ad Terram. Cometa Anni 1618 circa Medium Menſis Decembris, & iſte Anni 1680 circa finem ejuſdem Menſis, celerrime movebantur, adeoque tunc erant in Perigæis. Verum ſplendor maximus capitum contingit ante duas fere ſeptimanas, ubi modo exierant de radiis Solaribus; & ſplendor maximus

caudarum paulo ante, in majore vicinitate Solis. Caput Cometæ prioris, juxta observationes Cysati, Decem. 1. majus videbatur stellis primæ magnitudinis, & Decem. 16. (jam in Perigæo existens) magnitudine parum, splendore seu claritate luminis plurimum defecerat. Jan. 7. Keplerus de capite incertus finem fecit observandi. Die 12 mensis Dec. conspectum & à Flamstedio observatum est caput Cometæ posterioris, in distantia novem graduum à Sole; id quod stellæ tertiæ magnitudinis vix concessum fuisset. Decem. 15 & 17 apparuit idem ut stella tertiæ magnitudinis, diminutum utique splendore Nubium juxta Solem occidentem. Decem. 26. velocissime motus, inque Perigæo propemodum existens, cedebat ori Pegasi, Stellæ tertiæ magnitudinis. Jan. 3. apparebat ut Stella quartæ, Jan. 9. ut Stella quintæ, Jan. 13. ob splendorem Lunæ crescentis disparuit. Jan. 25. vix æquabat Stellas magnitudinis septimæ. Si sumantur æqualia à Perigæo hinc inde tempora, capita quæ temporibus illis in longinquis regionibus posita, ob æquales à Terra distantias, æqualiter lucere debuissent, in plaga Solis maxime splenduere, ex altera Perigæi parte evanuere. Igitur ex magna lucis in utroque situ differentia concluditur magna Solis & Cometæ vicinitas in situ priore. Nam lux Cometarum regularis esse solet, & maxima apparere ubi capita velocissime moventur, atque adeo sunt in Perigæis; nisi quatenus ea major est in vicinia Solis.

Coroll. (1.) Splendent igitur Cometæ luce Solis à se reflexa.

Coroll. (2.) Ex dictis etiam intelligitur cur Cometæ tantopere frequentant regionem Solis. Si cernerentur in regionibus longe ultra Saturnum deberent sæpius apparere in partibus Soli oppositis. Forent enim Terræ viciniores qui in his partibus versarentur, & Sol interpositus obscuraret cæteros. Verum percurrendo historias Cometarum reperi quod quadruplo vel quintuplo plures detecti sunt in Hemisphærio Solem versus, quam

in Hemisphærio opposito, præter alios procul dubio non paucos quos lux Solaris obtexit. Nimirum in descensu ad regiones nostras neque caudas emittunt, neque adeo illustrantur à Sole, ut nudis oculis se prius detegendos exhibeant, quam sint ipso Jove propiores. Spatii autem tantillo intervallo circa Solem descripti pars longe major sita est à latere Terræ quod Solem respicit; inque parte illa majore Cometæ Soli ut plurimum viciniores magis illuminari solent.

Coroll. (3.) Hinc etiam manifestum est, quod cœli resistentia destituuntur. Nam Cometæ vias obliquas & nonnunquam cursui Planetarum contrarias secuti, moventur omnifariam liberrime, & motus suos etiam contra cursum Planetarum diutissime conservant. Fallor ni genus Planetarum sint, & motu perpetuo in orbem redeant. Nam quod Scriptores aliqui Meteora esse volunt, argumentum à capitum perpetuis mutationibus ducentes, fundamento carere videtur. Capita Cometarum Atmosphæris ingentibus cinguntur; & Atmosphæræ inferne densiores esse debent. Unde nubes sunt, non ipsa Cometarum corpora, in quibus mutationes illæ visuntur. Sic Terra si è Planetis spectaretur, luce nubium suarum proculdubio splenderet, & corpus firmum sub nubibus prope delitesceret. Sic cingula Jovis in nubibus Planetæ illius formata, situm mutant inter se, & firmum Jovis corpus per nubes illas difficilius cernitur. Et multo magis corpora Cometarum sub Atmosphæris & profundioribus & crassioribus abscondi debent.

Orbem Cometæ Anni 1680 & 168$\frac{0}{1}$ spectanti & reliqua Phænomena in animo revolventi haud difficulter constabit quod corpora Cometarum sunt solida, compacta, fixa ac durabilia ad instar corporum Planetarum. Nam si nihil aliud essent quam vapores vel exhalationes Terræ, Solis, & Planetarum, Cometa hicce in transitu suo per viciniam Solis statim dissipari debuisset. Est enim calor Solis ut radiorum densitas, hoc est reciproce ut quadratum distantiæ locorum à Sole. Ideoque cum di-

stantia Cometæ à Sole Dec. 8. ubi in Perihelio versabatur, esset ad distantiam Terræ à Sole ut 6 ad 1000 circiter, calor Solis apud Cometam eo tempore erat ad calorem Solis æstivi apud nos ut 1.000.000 ad 36, seu 28.000 ad 1. Sed calor aquæ ebullientis est quasi triplo major quam calor quem terra arida concipit ad æstivum Solem: ut expertus sum: & calor ferri candentis (si recte conjector) quasi triplo vel quadruplo major quam calor aquæ ebullientis; adeoque calor quem terra arida apud Cometam in perihelio versantem ex radiis Solaribus concipere posset; quasi 2000 vicibus major quam calor ferri candentis. Tanto autem calore vapores & exhalationes, omnisque materia volatilis statim consumi ac dissipari debuissent.

Cometa igitur in perihelio suo calorem immensum ad Solem concepit, & calorem illum diutissime conservare potest. Nam globus ferri candentis digitum unum latus, calorem suum omnem spatio horæ unius in aere consistens vix amitteret. Globus autem major calorem diutius conservaret in ratione diametri, propterea quod superficies (ad cujus mensuram per contactum aeris ambientis refrigeratur) in illa ratione minor est pro quantitate materiæ suæ calidæ inclusæ. Ideoque globus ferri candentis huic Terræ æqualis, id est pedes plus minus 40.000.000 latus, diebus totidem, & idcirco annis 50.000, vix refrigesceret. Suspicor tamen quod duratio Caloris ob causas latentes augeatur in minore ratione quam ea diametri: & optarem rationem veram per experimenta investigari.

Porro notandum est quod Cometa Mense Decembri, ubi ad Solem modo incaluerat, caudam emittebat longe majorem & splendidiorem quam antea Mense Novembri, ubi perihelium nondum attigerat. Et universaliter caudæ omnes maximæ & fulgentissimæ è Cometis oriuntur statim post transitum eorum per regionem Solis. Conducit igitur calefactio Cometæ ad magnitudinem

dinem caudæ. Et inde colligere videor quod cauda nihil aliud sit quam vapor longe tenuissimus, quem caput seu Nucleus Cometæ per calorem suum emittit.

Cæterum de Cometarum caudis triplex est opinio, eas vel jubar esse Solis per translucida Cometarum capita propagatum; vel oriri ex refractione lucis in progressu ipsius à capite Cometæ in Terram: vel denique nubem esse seu vaporem à capite Cometæ jugiter surgentem & abeuntem in partes a Sole aversas. Opinio prima eorum est qui nondum imbuti sunt scientia rerum opticarum. Nam jubar Solis in cubiculo tenebroso non cernitur nisi quatenus lux reflectitur è pulverum & fumorum particulis per aerem semper volitantibus: adeoque in aere fumis crassioribus infecto splendidius est, & sensum fortius ferit; in aere clariore tenuius est & ægrius sentitur: in cœlis autem absque materia reflectente nullum esse potest. Lux non cernitur quatenus in jubare est, sed quatenus inde reflectitur ad oculos nostros. Nam visio non fit nisi per radios qui in oculos impingunt. Requiritur igitur materia aliqua reflectens in regione Caudæ, ne cœlum totum luce Solis illustratum uniformiter splendeat. Opinio secunda multis premitur difficultatibus. Caudæ nunquam variegantur coloribus: qui tamen refractionum solent esse comites inseparabiles. Lux Fixarum & Planetarum distincte ad nos transmissa demonstrat medium cœleste nulla vi refractiva pollere. Nam quod dicitur fixas ab Ægyptiis comatas nonnunquam visas fuisse, id quoniam rarissime contingit, ascribendum est nubium refractioni fortuitæ. Fixarum quoque radiatio & scintillatio ad refractiones tum Oculorum tum aeris tremuli referendæ sunt: quippe quæ admotis oculo Telescopiis evanescunt. Aeris & ascendentium vaporum tremore fit ut radii facile de angusto pupilli spatio per vices detorqueantur, de latiore autem vitri objectivi apertura neutiquam. Inde est quod scintillatio in priori casu generetur, in posteriore autem cesset: & cessatio in posteriore casu demonstrat regularem

gularem

gularem transmissionem lucis per cœlos absque omni refractione sensibili. Nequis contendat quod caudæ non soleant videri in Cometis cum eorum lux non est satis fortis, quia tunc radii secundarii non habent satis virium ad oculos movendos, & propterea caudas fixarum non cerni: sciendum est quod lux fixarum plus centum vicibus augeri potest mediantibus Telescopiis, nec tamen caudæ cernuntur. Planetarum quoque lux copiosior est, caudæ vero nullæ: Cometæ autem sæpe caudatissimi sunt, ubi capitum lux tenuis est & valde obtusa; sic enim Cometa Anni 1680, Mense Decembri, quo tempore caput luce sua vix æquabat stellas secundæ magnitudinis, caudam emittebat splendore notabili usque ad gradus 40, 50, 60 longitudinis & ultra: postea Jan. 27 & 28 caput apparebat ut stella septimæ tantum magnitudinis, cauda vero luce quidem pertenui sed satis sensibili longa erat 6 vel 7 gradus, & luce obscurissima, quæ cerni vix posset, porrigebatur ad gradum usque duodecimum vel paulo ultra; ut supra dictum est. Sed & Feb. 9 & 10 ubi caput nudis oculis videri desierat, caudam gradus duos longam per Telescopium contemplatus sum. Porro si cauda oriretur ex refractione materiæ cœlestis, & pro figura cœlorum deflecteretur de Solis oppositione, deberet deflexio illa in iisdem cœli regionibus in eandem semper partem fieri. Atqui Cometa Anni 1680 Decemb. 28. hora $8\frac{1}{2}$ P. M. Londini, versabatur in ♓ 8 *gr*. 41 cum latitudine boreali 28 *gr*. 6′, Sole existente in ♑ 18 *gr*. 26′. Et Cometa Anni 1577 Dec. 29. versabatur in ♓ 8 *gr*. 41′. cum latitudine boreali 28 *gr*. 40′. Sole etiam existente in ♑ 18 *gr*. 26′ circiter. Utroque in casu Terra versabatur in eodem loco & Cometa apparebat in eadem cœli parte: in priori tamen casu cauda Cometæ (ex meis & aliorum observationibus) declinabat angulo graduum $4\frac{1}{2}$ ab oppositione Solis Aquilonem versus; in posteriore vero (ex Observationibus Tychonis) declinatio erat graduum 21 in austrum. Igitur repudiata

cœlorum

cœlorum refractione, superest ut Phænomena Caudarum ex materia aliqua reflectente deriventur.

Caudas autem à capitibus oriri & in regiones à Sole aversas ascendere confirmatur ex legibus quas observant. Ut quod in planis orbium Cometarum per Solem transeuntibus jacentes, deviant ab oppositione Solis in eas semper partes quas capita in orbibus illis progredientia relinquunt. Quod spectatori in his planis constituto apparent in partibus à Sole directe aversis; digrediente autem spectatore de his planis, deviatio paulatim sentitur, & indies apparet major. Quod deviatio cæteris paribus minor est ubi cauda obliquior est ad orbem Cometæ, ut & ubi caput Cometæ ad Solem propius accedit; præsertim si spectetur deviationis angulus juxta caput Cometæ. Præterea quod caudæ non deviantes apparent rectæ, deviantes autem incurvantur. Quod curvatura major est ubi major est deviatio, & magis sensibilis ubi cauda cæteris paribus longior est: nam in brevioribus curvatura ægre animadvertitur. Quod deviationis angulus minor est juxta caput Cometæ, major juxta caudæ extremitatem alteram, atque adeo quod cauda convexo sui latere partes respicit à quibus fit deviatio, quæque in recta sunt linea à Sole per caput Cometæ in infinitum ducta. Et quod caudæ quæ prolixiores sunt & latiores, & luce vegetiore micant, sint ad latera convexa paulo splendidiores & limite minus indistincto terminatæ quam ad concava. Pendent igitur Phænomena caudæ à motu capitis, non autem à regione cœli in qua caput conspicitur; & propterea non fiunt per refractionem cœlorum, sed à capite suppeditante materiam oriuntur. Etenim ut in aere nostro fumus corporis cujusvis igniti petit superiora, idque vel perpendiculariter si corpus quiescat, vel oblique si corpus moveatur in latus; ita in cœlis ubi corpora gravitant in Solem, fumi & vapores ascendere debent à Sole (uti jam dictum est) & superiora vel recta petere, si corpus fumans quiescit; vel oblique, si corpus progredi-

endo loca ſemper deſerit à quibus ſuperiores vaporis partes aſcenderant. Et obliquitas iſta minor erit ubi aſcenſus vaporis velocior eſt: nimirum in vicinia Solis & juxta corpus fumans. Ex obliquitatis autem diverſitate incurvabitur vaporis columna: & quia vapor in columnæ latere præcedente paulo recentior eſt, ideo etiam is ibidem aliquanto denſior erit, lucemque propterea copioſius reflectet, & limite minus indiſtincto terminabitur. De caudarum agitationibus ſubitaneis & incertis, deque earum figuris irregularibus, quas nonnulli quandoque deſcribunt, hic nihil adjicio; propterea quod vel à mutationibus aeris noſtri, & motibus nubium caudas aliqua ex parte obſcurantium oriantur; vel forte à partibus Viæ Lacteæ, quæ cum caudis prætereuntibus confundi poſſint, ac tanquam earum partes ſpectari.

Vapores autem, qui ſpatiis tam immenſis implendis ſufficiant, ex Cometarum Atmoſphæris oriri poſſe, intelligetur ex raritate aeris Noſtri. Nam aer juxta ſuperficiem Terræ ſpatium occupat quaſi 850 vicibus majus quam aqua ejuſdem ponderis, ideoque aeris columna Cylindrica pedes 850 alta ejuſdem eſt ponderis cum aquæ columna pedali latitudinis ejuſdem. Columna autem aeris ad ſummitatem Atmoſphæræ aſſurgens æquat pondere ſuo columnam aquæ pedes 33 altam circiter; & propterea ſi columnæ totius aereæ pars inferior pedum 850 altitudinis dematur, pars reliqua ſuperior æquabit pondere ſuo columnam aquæ altam pedes 32. Inde vero (ex Hypotheſi multis experimentis confirmata, quod compreſſio aeris ſit ut pondus Atmoſphæræ incumbentis, quodque gravitas ſit reciproce ut quadratum diſtantiæ locorum à centro Terræ) computationem per Coroll. Prop. XXII. Lib. II. ineundo, inveni quod aer, ſi aſcendatur à ſuperficie Terræ ad altitudinem ſemidiametri unius terreſtris, rarior ſit quam apud nos in ratione longe majori, quam ſpatii omnis infra orbem Saturni ad globum diametro digiti unius deſcriptum. Ideoque globus aeris noſtri digitum unum

latus

latus, ea cum raritate quam haberet in altitudine semidiametri unius terrestris, impleret omnes Planetarum regiones ad usque sphæram Saturni & longe ultra. Proinde cum aer adhuc altior in immensum rarescat; & coma seu Atmosphæra Cometæ, ascendendo ab illius centro, quasi decuplo altior sit quam superficies nuclei, deinde cauda adhuc altius ascendat, debebit cauda esse quam rarissima. Et quamvis, ob longe crassiorem Cometarum Atmosphæram, magnamque corporum gravitationem Solem versus, & gravitationem particularum Aeris & vaporum in se mutuo, fieri possit ut aer in spatiis cœlestibus inque Cometarum caudis non adeo rarescat; perexiguam tamen quantitatem aeris & vaporum ad omia illa caudarum phænomena abunde sufficere ex hac computatione perspicuum est. Nam & caudarum insignis raritas colligitur ex astris per eas translucentibus. Atmosphæra terrestris luce Solis splendens, crassitudine sua paucorum milliarium, & astra omnia & ipsam Lunam obscurat & extinguit penitus: per immensam vero caudarum crassitudinem, luce pariter Solari illustratam, astra minima absque claritatis detrimento translucere noscuntur. Neque major esse solet caudarum plurimarum splendor, quam aeris nostri in tenebroso cubiculo latitudine digiti unius duorumve, lucem Solis in jubare reflectentis.

Quo tempore vapor à capite ad terminum caudæ ascendit, cognosci fere potest ducendo rectam à termino caudæ ad Solem, & notando locum ubi recta illa Trajectoriam secat. Nam vapor in termino caudæ, si rectà ascendat à Sole, ascendere cœpit à capite quo tempore caput erat in loco intersectionis. At vapor non rectà ascendit à Sole, sed motum Cometæ, quem ante ascensum suum habebat, retinendo, & cum motu ascensus sui eundem componendo, ascendit oblique. Unde verior erit Problematis solutio, ut recta illa quæ orbem secat, parallela sit longitudini caudæ, vel potius (ob motum curvilineum Cometæ) ut eadem à linea caudæ

di-

[illegible] inveni quod vapor qui erat in [illegible] 25. ascendere cæperat à capite ante [illegible] ideoque ascensu suo toto dies plus 45 [illegible]. At cauda illa omnis quæ Dec. 10. ap[illegible] [illegible]enuerat spatio dierum illorum duorum, qui à [illegible] perihelii Cometæ elapsi fuerant. Vapor igitur [illegible] in vicinia Solis celerrime ascendebat, & po[illegible] motu per gravitatem suam semper retardato [illegible] pergebat; & ascendendo augebat longitudinem [illegible]: cauda autem quamdiu apparuit ex vapore fere [illegible] constabat qui à tempore perihelii ascenderat; & vapor, qui primus ascendit, & terminum caudæ com[illegible], non prius evanuit quam ob nimiam suam tam à Sole illustrante quam ab oculis nostris distantiam videri desiit. Unde etiam caudæ Cometarum aliorum quæ breves sunt, non ascendunt motu celeri & perpetuo à capitibus & mox evanescunt, sed sunt permanentes vaporum & exhalationum columnæ, à capitibus lentissimo multorum dierum motu propagatæ, quæ participando motum illum capitum quem habuere sub initio, per cœlos una cum capitibus moveri pergunt. Et hinc rursus colligitur spatia cœlestia vi resistendi destitui; utpote in quibus non solum solida Planetarum & Cometarum corpora, sed etiam rarissimi caudarum vapores motus suos velocissimos liberrime peragunt ac diutissime conservant.

Ascensum caudarum ex Atmosphæris capitum & progressum in partes à Sole aversas Keplerus ascribit actioni radiorum lucis materiam caudæ secum rapientium. Et auram longe tenuissimam in spatiis liberri[illegible] actioni radiorum cedere, non est à ratione prorsus [illegible], non obstante quod substantiæ crassæ, impedi[illegible] in regionibus nostris, à radiis Solis sensibiliter [illegible] nequeant. Alius particulas tam leves quam [illegible] posse existimat, & materiam caudarum le[illegible]que levitatem suam à Sole ascendere. Cum [illegible] corporum terrestrium sit ut materia in

cor-

corporibus, adeoque ſervata quantitate materiæ intendi & remitti nequeat, ſuſpicor aſcenſum illum ex rarefactione materiæ caudarum potius oriri. Aſcendit fumus in camino impulſu aeris cui innatat. Aer ille per calorem rarefactus aſcendit, ob diminutam ſuam gravitatem ſpecificam, & fumum implicatum rapit ſecum. Quidni cauda Cometæ ad eundem modum aſcenderit à Sole? Nam radii Solares non agitant Media quæ permeant, niſi in reflexione & refractione. Particulæ reflectentes ea actione calefactæ calefacient auram ætheream cui implicantur. Illa calore ſibi communicato rarefiet, & ob diminutam ea raritate gravitatem ſuam ſpecificam qua prius tendebat in Solem, aſcendet & ſecum rapiet particulas reflectentes ex quibus cauda componitur: Ad aſcenſum vaporum conducit etiam quod hi gyrantur circa Solem & ea actione conantur à Sole recedere, at Solis Atmoſphæra & materia cœlorum vel plane quieſcit, vel motu ſolo quem à Solis rotatione acceperint, tardius gyratur. Hæ ſunt cauſæ aſcenſus caudarum in vicinia Solis, ubi orbes curviores ſunt, & Cometæ intra denſiorem & ea ratione graviorem Solis Atmoſphæram conſiſtunt, & caudas quam longiſſimas mox emittunt. Nam caudæ quæ tunc naſcuntur, conſervando motum ſuum & interea verſus Solem gravitando, movebuntur circa Solem in Ellipſibus pro more capitum, & per motum illum capita ſemper comitabuntur & iis liberrime adhærebunt. Gravitas enim vaporum in Solem non magis efficiet ut caudæ poſtea decidant à capitibus Solem verſus, quam gravitas capitum efficere poſſit ut hæc decidant à caudis. Communi gravitate vel ſimul in Solem cadunt, vel ſimul in aſcenſu ſuo retardabuntur, adeoque gravitas illa non impedit, quo minus caudæ & capita poſitionem quamcunque ad invicem à cauſis jam deſcriptis aut aliis quibuſcunque facillime accipiant & poſtea liberrime ſervent.

Caudæ igitur quæ in Cometarum periheliis naſcuntur, in regiones longinquas cum eorum capitibus abi-

bunt,

bunt, & vel inde post longam annorum seriem cum iisdem ad nos redibunt, vel potius ibi rarefacti paulatim evanescent. Nam postea in descensu capitum ad Solem caudæ novæ breviusculæ lento motu à capitibus propagari debebunt, & subinde, in Periheliis Cometarum illorum qui adusque Atmosphæram Solis descendunt, in immensum augeri. Vapor enim in spatiis illis liberrimis perpetuo rarescit ac dilatatur. Qua ratione fit ut cauda omnis ad extremitatem superiorem latior sit quam juxta caput Cometæ. Ea autem rarefactione vaporem perpetuo dilatatum diffundi tandem & spargi per coelos universos, deinde paulatim in Planetas per gravitatem suam attrahi & cum eorum Atmosphæris misceri rationi consentaneum videtur. Nam quemadmodum Maria ad constitutionem Terræ hujus omnino requiruntur, idque ut ex iis per calorem Solis vapores copiose satis excitentur, qui vel in nubes coacti decidant in pluviis, & terram omnem ad procreationem vegetabilium irrigent & nutriant; vel in frigidis montium verticibus condensati (ut aliqui cum ratione philosophantur) decurrant in fontes & flumina: sic ad conservationem marium & humorum in Planetis Cometæ requiri videntur; ex quorum exhalationibus & vaporibus condensatis, quicquid liquoris per vegetationem & putrefactionem consumitur & in terram aridam convertitur, continuo suppleri & refici possit. Nam vegetabilia omnia ex liquoribus omnino crescunt, dein magna ex parte in terram aridam per putrefactionem abeunt, & limus ex liquoribus putrefactis perpetuo decidit. Hinc moles Terræ aridæ indies augetur, & liquores, nisi aliunde augmentum sumerent, perpetuo decrescere deberent, ac tandem deficere. Porro suspicor spiritum illum, qui aëris nostri pars minima est sed subtilissima & optima, & ad rerum omnium vitam requiritur, ex Cometis præcipue venire.

Atmosphæræ Cometarum in descensu eorum in Solem excurrendo in caudas diminuuntur, & (ea certe in

parte

parte quæ Solem respicit) angustiores redduntur: & vicissim in recessu eorum à Sole, ubi jam minus excurrunt in caudas, ampliantur; si modo Phænomena eorum Hevelius recte notavit. Minimæ autem apparent ubi capita jam modo ad Solem calefacta in caudas maximas & fulgentissimas abiere, & nuclei fumo forsan crassiore & nigriore in Atmosphærarum partibus infimis circundantur. Nam fumus omnis ingenti calore excitatus crassior & nigrior esse solet. Sic caput Cometæ de quo egimus, in æqualibus à Sole ac Terra distantiis, obscurius apparuit post perihelium suum quam antea. Mense enim *Decem.* cum stellis tertiæ magnitudinis conferri solebat, at Mense *Novem.* cum stellis primæ & secundæ. Et qui utrumque viderant, majorem describunt Cometam priorem. Nam Juveni cuidam *Cantabrigiensi Novem.* 19. Cometa hicce luce sua quamtumvis plumbea & obtusa æquabat Spicam Virginis, & clarius micabat quam postea. Et *D. Storer* literis quæ in manus nostras incidere, scripsit caput ejus Mense *Decembri*, ubi caudam maximam & fulgentissimam emittebat, parvum esse & magnitudine visibili longe cedere Cometæ qui Mense *Novembri* ante Solis ortum apparuerat. Cujus rei rationem esse conjectabatur quod materia capitis sub initio copiosior esset & paulatim consumeretur.

Eodem spectare videtur quod capita Cometarum aliorum, qui caudas maximas & fulgentissimas emiserunt, describantur subobscura & exigua. Nam Anno 1668 Mart. 5. St. nov. hora septima Vesp. *R. P. Valentinus Estancius*, *Brasiliæ* agens, Cometam videt Horizonti proximum ad occasum Solis brumalem, capite minimo & vix conspicuo, cauda vero supra modum fulgente, ut stantes in littore speciem ejus è mari reflexam facile cernerent. Speciem utique habebat trabis splendentis longitudine 23 graduum, ab occidente in austrum vergens, & Horizonti fere parallela. Tantus autem splendor tres solum dies durabat, subinde notabiliter decrescens; & interea decrescente splendore aucta est magnitudine cauda.

Unde etiam in Portugallia quartam fere cœli partem (id est gradus 45) occupasse dicitur, ab occidente in orientem splendore cum insigni protensa; nec tamen tota apparuit, capite semper in his regionibus infra Horizontem delitescente. Ex incremento caudæ & decremento splendoris manifestum est quod caput à Sole recessit, eiqué proximum fuit sub initio, pro more Cometæ anni 1680. Et similis legitur Cometa anni 1101 vel 1106. *cujus Stella erat parva & obscura* (ut ille anni 1680) *sed splendor qui ex ea exivit valde clarus & quasi ingens trabs ad orientem & Aquilonem tendebat*, ut habet *Hevelius* ex *Simeone Dunelmensi* Monacho. Apparuit initio Mensis Feb. circa vesperam ad occasum Solis brumalem. Inde vero & ex situ caudæ colligitur caput fuisse Soli vicinum. *A Sole*, inquit Matthæus Parisiensis, *distabat quasi cubito uno, ab hora tertia* [rectius sexta] *usque ad horam nonam radium ex se longum emittens*. Talis etiam erat ardentissimus ille Cometa ab *Aristotele* descriptus Lib. I. Meteor 6. *cujus caput primo die non conspectum est, eo quod ante Solem vel saltem sub radiis solaribus occidisset, sequente vero die quantum potuit visum est. Nam quam minima fieri potest distantia Solem reliquit, & mox occubuit. Ob nimium ardorem* [caudæ scilicet] *nondum apparebat capitis sparsus ignis, sed procedente tempore* (ait Aristoteles) *cum* [cauda] *jam minus flagraret, reddita est* [capiti] *Cometa sua facies. Et splendorem suum ad tertiam usque cœli partem* [id est ad 60 gr.] *extendit. Apparuit autem tempore hyberno, & ascendens usque ad cingulum Orionis ibi evanuit.* Cometa ille anni 1618, qui è radiis Solaribus caudatissimus emersit, stellas primæ magnitudinis æquare vel paulo superare videbatur, sed majores apparuere Cometæ non pauci qui caudas breviores habuere. Horum aliqui Jovem, alii Venerem, vel etiam Lunam æquasse traduntur.

Diximus Cometas esse genus Planetarum in Orbibus valde excentricis circa Solem revolventium. Et quemadmodum è Planetis non caudatis, minores esse solent

qui in orbibus minoribus & Soli propioribus gyrantur, sic etiam Cometas, qui in Periheliis suis ad Solem propius accedunt, ut plurimum minores esse, & in orbibus minoribus revolvi rationi consentaneum videtur. Orbium vero transversas diametros & revolutionum tempora periodica ex collatione Cometarum in iisdem orbibus post longa temporum intervalla redeuntium determinanda relinquimus.

XXXIX.

EXPOSITA jamjam Philosophia Newtoniana, *Halleianam Cometographiam*, Newtonianæ succenturiatam, & inædificatam, exponere conabimur. Et cum Opus hocce Cl. Halleii sit per se nobilissimum, at succinctius paulo atque obscurius traditum, utpote grandioris tantum operis prodromum; neque alibi in Tyronum usum facilius explicatum etiamnum extet, Integrum illud hoc in loco, verum perpetuo Commentario auctum atque illustratum exponere, & iterato in publicum dare volui. Præfatio quidem Historica eidem præfixa commentario non indiget; eandem tamen, nequid præclari hujusce operis hic loci desideretur, exscribere non gravabor. Sic vero se habet.

Astronomiæ Cometicæ Synopsis.

" Veteres Ægyptii & Chaldæi, siqua Fides Dio-
" doro Siculo, longa observationum se-
" rie instructi, Cometarum ἐπιβολὰς [sive
" exortus] prænunciare valuerunt. Cum
" autem iisdem artibus etiam Terræ Mo-
" tus ac Tempestates prævidisse dican-
" tur, extra dubium est Astrologiæ potius calculo fa-
" tidico, quam Astronomicis motuum Theoriis, eo-

Act. Philosoph. Num. 297. pag. 1882, &c. An. Domini. 1705. Mense Martio.

" rum de his rebus scientiam referendam esse. Ac vix " alia à Græcis, utriusque populi victoribus, reperta " est apud eos doctrina; adeo ut eam, quam nunc eo " usque proveximus, Astronomiam, Græcis ipsis, præ- " sertim magno Hipparcho, uti inventoribus, accep- " tam debeamus. Apud hos vero Aristotelis senten- " tia, qui Cometas nihil aliud esse voluit quam vapo- " res sublunares, vel etiam Meteora aerea, tantum ef- " fecit, ut hæc Astronomicæ scientiæ pars longe sub- " tilissima omnino neglecta manserit; cum nemini o- " peræ pretium visum fuerit vagas & incertas fluitan- " tium in æthere vaporum semitas adnotare, scriptisque " mandare; unde factum ut ab illis nihil certi de motu " Cometarum ad nos transmissum reperiatur.

" Seneca autem Philosophus, perpensis duorum in- " signium sui temporis Cometarum Phænomenis, non " dubitavit iis loca inter corpora cœlestia assignare, Sy- " dera esse cum mundo duratura existimans, quanquam " motus eorum legibus nondum compertis regi fateatur. " Tandemque Vaticinio non irrito promittit aliquando " futura secula, quibus hæc tam occulta *dies extraheret* " *ac longioris ævi diligentia:* quibusque admirationi fo- " ret hæc *Veteres* nescire potuisse; postquam *Demon-* " *straverit aliquis* Naturæ Interpres *in quibus Cœli parti-* " *bus Cometæ errent, quanti, qualesque sint.* Ab hac " autem Senecæ sententia in diversas partes abiit pene " omnis Astronomorum Cohors; ac ipse Seneca, neque " phænomena motus, quibus opinionem hanc tueretur, " neque tempora adscribere dignatus est quæ posteris " ad hæc definienda usui forent. Ac evolutis pluri- " mis Cometarum historiis nihil omnino invenio quod " huic negotio inservire possit ante annum à Christo " nato 1337 quo Nicephorus Gregoras Historicus & " Astronomus Constantinopolitanus nobis Cometæ se- " mitam inter fixas satis accurate descripsit: tempora " autem nimis laxe consignavit: ita ut non nisi " quod abhinc quadringentis pene annis apparuerit lu-

" bri-

" bricus & incertus hic Cometa Catalogo, quem damus, " inſeri mereatur. Dein Cometa Anni 1472 om- " nium velociſſimus ac terris proximus Regiomonta- " num habuit Obſervatorem. Hic magnitudine ac " Coma terribilis, unius diei ſpatio 40 gradus ſub cir- " culo cœli maximo emenſus eſt, ac omnium primus " eſt de quo obſervata idonea ad nos pervenere. Quot- " quot autem Cometas conſiderarunt, uſque ad tem- " pora Tychonis Brahe, magni illius Aſtronomiæ re- " ſtauratoris, eos ſublunares eſſe autumarunt, adeoque " parvi penderunt, utpote pro Vaporibus habitos. Anno " autem 1577. (Tychone jam ſtudio aſtrorum ſerio " incumbente, comparatiſque Machinis ingentibus pro " dimetiendis cœli arcubus majori cum cura & certitu- " dine quam Veteribus ſperare fas erat) Emerſit Co- " meta ſatis conſpicuus; cui obſervando ſtrenue ſeſe ac- " cinxit Tycho; multiſque & fidis experimentis de- " prehendit nulli, quæ ſentiretur, Parallaxi diurnæ " obnoxium fuiſſe; adeoque non tantum non fuiſſe " Vaporem aereum, ſed & etiam multo ſuperiorem " extiſſe Luna: imo nihil obſtabat quin inter ipſos " Planetas collocaretur; fruſtra interim contra obſtre- " pentibus Scholaſticorum nonnullis.

" Tychonis vero eximiam in obſervando induſtri- " am excepit Kepleri ſagaciſſimum & pene divinum " ingenium. Hic Tychonis laboribus fretus, & Sy- " ſtema Mundi verum & Phyſicum adinvenit, ac ſci- " entiam Aſtronomicam in immenſum auxit. Mon- " ſtrato ſcilicet Planetas omnes in planis per Solis Cen- " trum tranſeuntibus revolvi, Curvaſque Ellipticas de- " ſcribere; ea lege, ut Areæ Sectorum Ellipticorum " ad Centrum Solis in Ellipſeωs foco conſtituti tem- " poribus, quibus deſcribantur arcus, ſemper propor- " tionales ſint. Invenit etiam Diſtantias Planetarum à " Sole eſſe in ſeſquialtera ratione temporum periodico- " rum; ſive Cubos Diſtantiarum eſſe ut Quadrata Tem- " porum. Tanto autem artifici affulſere duo Cometæ;

" quorum alter maxime illustris. Ex horum observa-
" tis conclusit Keplerus, non uno parallaxis annuæ in-
" dicio Cometas inter Orbes Planetarum liberrime qua-
" quaversum ferri: motu quidem non multum à recti-
" lineo diverso; sed quem nondum definire licuit. Ac
" Hevelius, Tychonis æmulus, Kepleri vestigiis insi-
" stens eandem Hypothesim Motus rectilinei amplexus
" est; ipse plurium Cometarum Observator perquam
" subtilis. Cœlo tamen Calculum suum non penitus
" consentire questus est; Viamque Cometicam versus
" Solem incurvari ei suboluit. Tandem de summò
" cœlo lapsus est prodigiosus ille Cometa Anni 1680.
" quasi Casu perpendiculari Solem petens, & exinde
" pari velocitate assurgens: Hic per quatuor Menses
" continuos visus, insigni ac peculiari curvitate Or-
" bitæ ad investigationem Motus Theoriæ præ cæteris
" idoneus erat: instructis autem jampridem Regiis
" Observatoriis, Parisiensi & Grenovicensi, ac Astro-
" nomorum Clarissimorum curæ commissis, accidit ut
" hujus Cometæ Motus apparens, quantum forsan Mor-
" talibus fas est, accuratissime à Cassino & Flamstedio
" observaretur.

" Non multo post, dum Geometrarum Princeps il-
" lustrissimus Newtonus operam dabat *Principiis Philo-
" sophiæ Mathematicis*; Non solum inventa Kepleri in
" Systemate Planetario locum habere demonstravit, ve-
" rum etiam Cometarum Phænomena omnia ex iisdem
" Principiis evidenter consequi. Id quòd exemplo
" prædicti Cometæ Anni 1680 abunde illustravit;
" modumque docuit Geometrice construendi Orbitas
" Cometarum, Problemaque arduum, ac tanto Oedipo
" dignum summa cum omnium admiratione resolvit,
" Cometam autem hunc in orbe parabolico Solem cir-
" cumiisse probat; ita ut areæ ad centrum Solis æsti-
" matæ temporibus proportionales fuerint.

" Tanti Viri vestigia insecutus eandem methodum
" calculo arithmetico accommodare aggressus sum,

" inquit

" inquit Cl. Halleius, nec irrito conamine. Undique " enim conquisitis Cometarum Observationibus, Ta- " bellam immensi pene calculi fructum obtinui; exi- " guum quidem, sed non ingratum Astronomis munus. " Hi etenim numeri vim habent omnia quæ de motu " Cometarum hactenus observata sunt accuratissime re- " præsentandi, ope solius Tabulæ Generalis insequentis: " cui adornandæ nullis sane peperci laboribus, ut per- " fecta prodiret; utpote posteritati consecrata, ac cum " scientia Astronomica duratura.

Hactenus Cl. Halleius sine Interprete. Jam vero reliquam Cometographiæ partem in membra discerptam ut Commentario illustremus res ipsa postulat.

Tabulæ generalis Constructio & Usus.

" Ut Planetæ in Orbibus Ellipticis, ita Cometæ " in Parabolicis, Solem in Foco communi situm am- " biunt; ea lege, ut Areæ æquales æqualibus tempori- " bus describantur. Quoniam vero Parabolæ omnes in- " ter se similes sunt, si determinata aliqua pars Areæ " datæ Parabolæ dividatur in partes quotlibet; in om- " nibus Parabolis fiet similis divisio, sub iisdem angu- " lis: atque distantiæ erunt proportionales. Ideoque " una nostra Tabula pro Cometis omnibus sufficiet. " Hactenus Halleius.

Notandum autem Autorem Clarissimum non hic loci asserere trajectorias Cometarum esse revera Parabolicas; sed id solum velle, eas esse ellipticas potius, uti postmodum liquebit; sed adeo eccentricas, ut pars illa orbitarum ellipticarum quæ mundum Planetarium spectat, & quæ circa Solem & Tellurem versatur, sive quam nos Terricolæ videre possumus, tantillum à lineæ parabolicæ parte curvata & congeneri discrepare, ut vice ellipseos Parabola tuto & sine sensibili errore assumi possit. Prius enim monitum ellipses omnium specierum esse posse, & concentricas in Circulos, infinite eccentri-

cas in Parabolas degenerare. Neque proinde mirum si loco ellipseos, figuræ difficilioris contemplationis, & ignotæ, in hoc casu, speciei, Parabolam contemplatu longe faciliorem, & unius semper speciei adhibere cupiamus: eo nempe in loco ubi phænomena Cometarum trajectorias tantum non Parabolicas nobis planissime exhibere dignoscuntur. Areæ æquabilitatem, Planetas æque ac Cometas spectantem, olim exposuimus; neque actum prius nunc agere sustinebimus. Palam autem est similes figuras, ut circulos & parabolas, qualescunque sint, similes partium, atque proportionales linearum correspondentium divisiones, numeris iisdem exprimendas, admittere & postulare. Pergat Halleius.

" Calculi autem hujus Tabulæ hæc est ratio. In " Schemate, sit *S.* Sol. *P O C* Orbita Cometæ. *P* " perihelion. *O* Locus ubi Cometa quadrante distat à " Perihelio. *C* locus quivis alius. Junge *CP*. *CS*. " ac fiant *ST*. *SR* æquales ipsi *CS*. ac ductis rectis " *CR*, *CT*. (quarum hæc Curvæ Tangens est, illa per- " pendicularis,) in axem *P S R* demitte Normalem " *CQ*. Jam data quavis Area *COPS* oportet angu- " lum *CSP*, & distantiam *CS* inquirere. Hæc Au- " thor.

Nimirum uti in Astronomia Planetaria locum Pla-

netæ,

netæ, ſive diſtantiam ab Axe Ellipſeos angularem, quam ejuſdem *anomaliam veram* dicimus una cum *diſtantia à Sole* abſoluta, imprimis quærimus; ita & in Cometis, ſimilem angulum & diſtantiam ut primo inveſtigemus eſt neceſſe. Notandum autem ex natura Parabolarum omnium Lineam *SO* eſſe Lateris recti dimidiam. *SP* ejuſdem Lateris recti partem quartam, ſive ipſius *SO* dimidiam: atque ducta ad punctum quodvis ut *C* tangente *CT*, erectaque ad eandem linea perpendiculari *CR*, axem ſecante, & dimiſſa ab eodem puncto *C* ad axem perpendiculari *CR*, axem ſecante *CQ*; eſſe *SC*, *SR*, & *ST* inter ſe æquales: eſſe quoque lineas *PQ*, *PT*, inter ſe æquales; & lineam *QR* eſſe ipſi *SO*, ſive Lateris recti ſemiſſi æqualem. Quæ omnia ex Conicis ſunt notiſſima. Pergat Author.

"Jam data quavis Area *COPS* oportet angulum *CPS*, " & diſtantiam *CS*, inquirere. Quoniam ob naturam " Parabolæ recta *RQ* ubique æqualis eſt ſemilateri " recto. Ponatur latus rectum $= 2$; adeoque $RQ =$ " 1: ac ſit recta $CQ = z$. erit itaque $PQ = \frac{1}{2} zz$; " ac Segmentum Parabolicum $COP = \frac{1}{12} zzz$; Tri" angulum autem *CSP* erit $\frac{1}{4} z$. adeoque area mixti" linea *COPS* erit $= \frac{1}{12} z^3 + \frac{1}{4} z = a$. ac $z^3 +$ " $3z = 12a$. Quare reſoluta hac æquatione Cubica, " z, ſive ordinatim applicata *CQ* innoteſcet. Hæc " Halleius.

Obſervandum autem probe viam hic analyticam ſterni inveniendæ anomaliæ coæquatæ in parabola, ex data ſemper anomalia media, hoc eſt, area deſcripta, tempori deſcriptionis ubique proportionali. Neque ſine analyſi ex data area ſive anomalia media, angulus *CST* ſive anomalia coæquata directe inveniri poteſt. Quod vero ex hypotheſi quod linea primo quærenda *CQ* (ex ea enim inventa angulus *CST* facile reperietur, uti mox patebit.) dicatur z, linea *PQ* æquabitur $\frac{1}{2} zz$ demonſtratu eſt perfacile: nam ut $RQ. = 1$, ad $CQ = z$, ita eadem $CQ. = z$, ad *QT*, ſive zz, cujus pars

dimi-

dimidia proinde OP æquabitur $\frac{1}{2}zz$. Quod vero segmentum Parabolicum COP ex eadem hypothesi recte exprimetur per $\frac{1}{12}zzz$ ex Conicis etiam facillime consequitur. Est enim area $COPSQ$, ad triangulum CPQ, sive CPT eidem æquale. ut 4 ad 3: atque adeo area parabolica COP ad CPQ ut 1 ad 3. & cum triangulum CPQ ex perpendiculari CQ sive z in dimidiam basin $\frac{1}{4}zz$ ducta, fit $\frac{1}{4}zzz$, erit ejus pars tertia necessario $\frac{1}{12}zzz$, æqualis areæ parabolicæ COP. Est quoque triangulum CSP, ex perpendiculari z in dimidiam basin $\frac{1}{4}$, æquale $\frac{1}{4}z$: atque adeo summa arearum COP, & CPS, sive integra area $COPS$ tempori proportionalis erit æqualis summæ harum quantitatum, quæ dicitur a: sive orietur æquatio hæc $\frac{1}{12}z^3 * + \frac{1}{4}z * = a$: & multiplicando utrinque per 12. $z^3 + 3z = 12a$. Quæ est æquatio cubica, cujus termini secundus & quartus desunt. Inventa itaque hujus æquationis radice, sive ipsius z valore in numeris, per methodum, si placet, Halleianam alibi exhibitam, vel aliter, Lineæ CQ longitudo innotescet. $Q.E.I.$

Audiamus jam ipsum Authorem.

" Proponatur jam area OPS in partes centenas di-
" videnda. Hæc area duodecima pars est quadrati late-
" ris recti; adeoque $12a$ æquantur quadrato illo $= 4$.
" Si itaque successive extrahantur radices æquationum
" $z^3 + 3z = 0{,}04 : 0{,}08 : 0{,}12 : 0{,}16$: &c. habe-
" buntur totidem z, sive ordinatim applicatæ CQ
" respective; ac divisa erit area SOP in partes cente-
" nas. Eodemque modo ultra locum O continuan-
" dus est calculus. Radix autem hujus æquationis cum
" RQ fit $= 1$. Tangens est tabularis anguli CRQ,
" sive dimidii anguli CSP; adeoque angulus CSP
" datur. Ejus denique anguli CRQ secans RC me-
" dia proportionalis est inter RQ, sive unitatem, &
" RT, quæ dupla est ipsius SC; ut ex Conicis notis-
" simum est. Quod si SP ponatur 1, adeoque la-
" tus rectum $= 4$, ut in Tabula nostra, ipsa RT erit

" distan-

“ diſtantia quæſita, duplum ſcilicet ipſius *SC* in pri-
“ ore parabola. Ad hunc modum ſequentem Tabulam
“ elaboravi, repræſentandis omnium Cometarum mo-
“ tibus inſervientem: hactenus enim nullus ex Obſer-
“ vatis Parabolæ leges reſpuit. Hæc Author.

Quod vero area *OPS* ſit pars duodecima quadrati lateris recti hinc liquet; quod ex conicis area *OPS* ſit $\frac{2}{3}$ rectanguli *OS* in *SP*; hoc eſt, rectanguli dimidii lateris recti, in ejuſdem partem quartam. Nam $\frac{2}{3}$ in $\frac{1}{8} = \frac{1}{12}$. Numeri autem quivis ut 4. 8. 12. 16. Si in ſecundo Decimalium loco ponantur, uti hic fit, partes centenas rite exprimeut. Ideo autem angulo recto tanquam norma principali computationis contenti ſumus, quod periodo integra in parabolis caremus. Ob æquales vero *SC*, *SR*, angulus externus trianguli iſoſcelis *CRS*, duplo angulo *CRS* æquabitur. Datoque proinde per tabulas Tangentium angulo *CRQ* duplum ejus, ſive angulus *CST*, hoc eſt, *anomalia* Cometæ *coæquata* habetur. Pariter, dato jam angulo *CST*, ſi per auream regulam ſit, Ut *RQ* = 1, ad anguli iſtius ſecantem, ex iiſdem Tabulis deſumendam; ita iſta ſecans, ad tertiam proportionalem *RT*; Hujus ſemiſſis *RS* æquatur ipſi *SC*, ſive diſtantiæ Cometæ à Sole. *Q. E. I.*

Novemb. 29°. 1708.

XL.

“ RESTAT jam, inquit Halleius, præcepti calculi tradere, modumque ſupputandi locum Cometæ
“ viſum ex his numeris exhibere. Cometæ autem in
“ Parabola moventis Velocitas ubique, eſt ad Veloci-
“ tatem Planetæ gyrantis in circulo circa Solem, ad ean-
“ dem à Sole diſtantiam; ut $\sqrt{2}$, ad 1. ut conſtat ex

“ Prin-

" Principiis Phil. Nat. Math. Lib. I. Prop. 16. Coroll. " 7. Si itaque Cometa in perihelio ad diſtantiam æqualem diſtantiæ terræ à Sole ſupponatur, erit area diurna, " quam deſcriberet Cometa, ad aream quam deſcribit Terra, ut $\sqrt{2}$ ad 1: ac proinde tempus annuum, " ad tempus quo Cometa talis deſcriberet quadrantem " Orbitæ ſuæ à Perihelio, ut 3.14159, *&c.* (hoc eſt, " ut area circuli) ad $\sqrt{\frac{8}{9}}$. Hæc ille.

Prop. XXII. *prius.*

Quod velocitas in parabola ſit ad velocitatem, pro eadem diſtantia, in circulo ut $\sqrt{2}$ ad 1. vel ut 10 ad 7 fere, olim demonſtravimus: ſive potius ex natura curvaturæ circularis & parabolicæ, & ratione ſubtenſarum anguli contactuum in hiſce curvis, inſtar Corollarii, deduximus. Tempus autem in circulo ecliptico annuum, ſive tempus revolutionis integræ per circuli aream integram, ex ſemiperipheriæ in radium ductu æſtimandam, expoſitum; erit ad tempus deſcriptionis arcus quadrantalis in parabola, per parabolæ aream quadrantalem ex ductu $\frac{2}{3}$ ſemilateris recti in ejuſdem *lateris* ſive *radii* quadrantem æſtimandam, expoſitum; ut ipſæ areæ; ſive ut altitudines rectangulorum ad communem baſin: niſi quatenus velocitas deſcriptionis in Parabola iſtam temporum rationem turbat, & minuit, in ratione 1 ad $\sqrt{2}$. itaque vice $\frac{2}{3}$ adhibeatur $\sqrt{\frac{4}{9}}$: & duplicetur numerator propter numerum quadratum, ſcilicet binarium, unitatis duplum, hoc eſt, pro circulo adhibeatur ejus area 3.141.59. pro Parabola $\sqrt{\frac{8}{9}}$. atque ita facile intelligetur ratiocinii Halleiani veritas. " Pergat autem ille: " Cometa igitur deſcriberet quadrantem illum diebus " 109. 14^h. $46'$, adeoque area illa parabolica, areæ " *POS* analoga, in centum particulas diſtributa, ſingulis diebus competunt particulæ 0.912.280. cujus " Logarithmus, nempe 9.960.128 in perpetuum uſum " ſervandus eſt. Tempora autem quibus Cometa in " diſtantia majore vel minore quadrantes ſimiles deſcriberet, ſunt ut revolutiones in circulis, hoc eſt, in

" ſeſqui-

" ſeſquiplicata ratione diſtantiarum; adeoque areæ di-
" urnæ, in partibus centeſimis quadrantis æſtimatæ,
" (quas medii motus menſuras, inſtar graduum poni-
" mus) ſunt in ſingulis in ſubſeſquialtera ratione diſtan-
" tiæ periheliæ à Sole.

Medius nempe motus diurnus 0.912.280 Logarithmo *Negativo* — 0.039.872 ex antiquiore more exprimendus, more hic loci novo *Poſitivo* 9.960.128. ad evitandas nempe characteriſticæ negativæ moras, exprimitur: rejecto nimirum in additione denario, cum uſus venerit, ut formæ conſuetæ æquivaleat. Recte autem hic notat Halleius in diverſis Parabolis quadrantem eodem quidem partium numero, nempe centenario, ubique cenſeri; ita tamen ut partes iſtæ revera inæquales, & pro magnitudine Parabolæ majores, pro parvitate minores ſint, & ea quidem ratione majores vel minores, non qua ipſæ à Sole diſtantiæ creſcunt, vel decreſcunt, ſed in ejuſdem ſubſeſquialtera: ita ut diſtantiarum Quadrata ſint inter ſe ut harum partium Cubi reciproce.

" His neceſſario præmiſſis proponatur alicujus è Co-
" metis noſtris Locum viſum ad datum tempus ſuppu-
" tare. Primum itaque Solis locus ab æquinoctio in
" promptu ſit; ejuſdemque diſtantiæ à Terra Loga-
" rithmus. 2°. Capiatur intervallum temporis inter
" tempus Perihelii & tempus datum, in diebus parti-
" buſque diei decimalibus. Hujus numeri Logarithmo
" addatur Logarithmus conſtans 9.960.128. ac com-
" plementum Arithmeticum ſeſquialterius Logarithmi
" diſtantiæ periheliæ à Sole. Summa, Logarithmus
" erit motus medii in prima columna tabulæ generalis
" quærendi. 3°. Cum motu medio capiatur in ta-
" bula correſpondens angulus à Perihelio; & Loga-
" rithmus pro diſtantia à Sole: ac in Cometis directis
" *adde*, in retrogradis *ſubduc*; ſi fuerit tempus poſt
" perihelium: vel in directis *ſubduc*, & in retrogradis
" *adde*; ſi fuerit ante Perihelium; angulum ſic inven-
" tum à loco, [ſubtrahe] vel ad locum Perihelii [adde]

" &

" & habebitur Locus Cometæ in Orbita propria: & ad
" Logarithmum pro distantia ibidem inventum adda-
" tur Logarithmus distantiæ periheliæ: Summa erit
" Logarithmus distantiæ veræ Cometæ à Sole. 4°. Cum
" Loco Cometæ in Orbita, dato loco Nodi, Capiatur
" distantia Cometæ à Nodo; ac dato Inclinatione plani,
" dabuntur notissimis Trigonometriæ præceptis Locus
" Cometæ ad Eclipticam reductus, cum inclinatione
" sive Latitudine Heliocentrica; ac distantiæ curtatæ
" Logarithmus. 5°. Ex his datis iisdem omnino re-
" gulis quibus loca Planetarum ex dato loco & distan-
" tia Solis, obtinebitur Locus Visus, seu Geocentri-
" cus, cum Latitudine Visa. Id quod exemplo uno
" vel altero operæ pretium erit illustrare. Hæc ille.
Quod ad Locum Solis attinet, ejusque à Terra distantiam, utrumque calculo Astronomico reperire alibi docuimus. Distantiarum autem Logarithmos, incuria quadam illic omissos, ad calcem hic dabimus; ut huic negotio æque ac reliquis Astronomiæ usibus possit inservire. Ideo autem Logarithmus dierum additur dato unius diei Logarithmo, ut motus unius diei, per dierum numerum multiplicatus intelligatur; notum enim est additionem Logarithmorum, numerorum Logarithmis correspondentium multiplicationem inferre. Atque hæc suffecerint, modo Cometa in Perihelio suo ad distantiam Radio Orbis magni æqualem pertransire supponatur. Sin, quod plerumque (si non semper) usu venire solet, ad majorem distantiam, uti nonnunquam fit; aut ad minorem, uti sæpius, Cometæ pertranseat; area ista tempori proportionalis augenda est vel minuenda; idque in subsesquialtera istius minimæ à Sole distantiæ ratione: ut ita demum area ista *anomaliam mediam* recte exponere possit. Unde priori Logarithmorum summæ addendus est istius distantiæ sesquiplicatæ Logarithmus, & radius subducendus, juxta aureæ regulæ per Logarithmos administrandæ exigentiam: sive, quod perinde est, istius Logarithmi sesquialterius comple-

mentum Arithmeticum solummodo addendum. Neque mirum videri debet quod in distantiis *minoribus addendo* Logarithmum, veram rationem adauctam atque eandem in *majoribus* distantiis diminutam obtineamus. Multiplicatio enim per fractionem vel partes decimales non minus minuit summam, quam multiplicatio per numeros integros eandem auget. Et par est ratio additionis Logarithmicæ: uti facile notum. Observandum autem Logarithmos in tertia Tabulæ generalis columella consignatos non esse numerorum distantiarum à Sole præter radium sive præter distantiam minimam ipsi radio addendorum, sed numerorum quorum multiplicatione distantiam istam veram obtineretur. Unde eorundem Logarithmi sibi invicem superadditi Logarithmum istius distantiæ à Sole integræ facile exhibebunt. Hisce rite intellectis calculus haud ægre administrabitur; nempe ut apud Halleium sequitur.

E x e m p l u m I.

Quæritur Locus Cometæ Anni $166\frac{4}{5}$ Martii 1°. 7h. 00′. P. M. Londini. Hoc est 96°. 19h. 8′. post Perihelion ejus Novemb. 24°. 11h. 52′. Celebratum.

Log.Dist.Perihel.	10.011.044		°. ′. ″.
Log.sesquialt. —	10.016.566	*Perihel.* ♌ ——	10.41.25
	————	*Ang. Correspond.*	83.38. 5
Comp. Arith. ——	9.983.434	*Comet. in Orb.* ♉	17. 3.20
	9.960.128	☊. ♊.	21.14.00
Log. Temp.	1.985.862	*Com. à Nodo.*	34.10.40
	————	*Red. ad Eclip.*	32.19. 5
Log. Med. Mot.	1.929.424		————
	————	*Com. Helioc.* ♉	.18.54.55
Medius Motus.	851.001	*Incl. Bor.*	11.46.50

Log.

Log. pro dist.	0.255.396
Log. Perihel.	0.011.044
Co-sin. Incl.	9.990.754
Log. dist. Curt.	0.257.167
Log. dist. ☉.	9.997.918

	°	′	″
☉. ♓. —	21.	44.	45.
Com. Visus ♈.	29.	18.	30.
Lat. Vis. Bor.	8.	36.	15.

Exemplum II.

Quæritur Locus Cometæ Anni 1683 Julii 23°. 13h. 30′. T. M. Londini. Vel 13h. 40′. T. æquat hoc est [illegible]. post Perihelion.

Log. Dist. Perihel.	9.748.343		° ′ ″
Log. [illegible]	9.522.514	*Perihel.* ♊. — —	25.29.30
		Ang. Correspond.	56.47.20
Comp. Arith.	[illegible]	*Comet. in Orb.* ♈.	28.42.10
	9.960.128	☊. ♓.	23.23.00
Log. Temp.	1.310.[illegible]	*Com. à* ☊.	35.19.10
		Red. ad Eclip.	4.48.30
Log. Mot. Med.	1.6[illegible]	*Com. Helioc.* ♓.	28.11.30
Motus Medius	44L498	*Incl. Bor.*	35. 2. 0

Log. pro dist.	0.111.336
Log. Perihel.	9.748.343
Co-sin. Incl.	9.913.187
Log. dist. Curt.	9.772.866
Log. dist. ☉.	0.006.104

	°	′	″
☉ *Locus* ♌.	10.	41.	25.
Com. Visus ♋.	5.	11.	50.
Lat. Bor. —	28.	52.	00.

Jam

Jam vero, ut Calculus hicce Cometicus rite administretur; Notandum (1°) Logarithmum distantiæ minimæ, sive periheliæ, ea tantum de causa hic apponi, ut alterum Logarithmum, ejusdem sesquialterum, sive ad priorem ut 3 ad 2, rationis nempe sesquialteræ indicem, obtineamus. (2°) Hujus Logarithmi postremi complementum Arithmeticum Logarithmo constanti unius diei additum conficere Logarithmum integri temporis ante vel post perihelion. Per Logarithmos enim operando numeri ex. gr. in exemplorum priore sic sese habebunt. Logarithmus unius diei est 9.960.128. & dierum Logarithmus est 1.985.862. Hi soli simul additi Logarithmum medii motus conficicerent, si modo distantia perihelia esset unitati, sive radio Orbis magni æqualis: Sed cum augenda sit ista medii motus area in ratione istius distantiæ periheliæ sesquialterius, ad radium Orbis magni, addendus est Logarithmus iste sesquialter 0.016.566, ad priorem Logarithmum; & subtrahendus numeri denarii Logarithmus; sive, quod perinde est, addendum solummodo Logarithmi sesquialterius Complementum Arithmeticum: quod hoc in loco factitatum: Medius vero motus ex ejusdem Logarithmo jam dato facile innotescet. (3°) Dato jam motu medio, sive *anomalia media*, eidem in Tabula generali angulus correspondens est 83°. 38′. 5″. (inventis nimirum ubi opus, per auream regulam partibus ubique intermediis proportionalibus.) qui ex loco Perihelii apud Leonem 10°. 41′. 25″, *subductus*, propter motum nempe Cometæ retrogradum, & post perihelion, dat Locum Cometæ in Orbita Propria, sive *Anomaliam Coæquatam*, apud Taurum 17°. 3′. 20″. (4°) Locum hunc à Loco Nodi descendentis apud Geminos 21°: 14′. 00″. subtrahe: Reliqua erit distantia Cometæ à Nodo, 34°. 10′. 40″. (5°) Ut jam Locum Cometæ in Orbita propria ad Eclipticam, pro Planetarum more, reducamus, resolvendum est Triangulum Sphæricum Rectangulum, atque ex dato Angulo &

Hypotenusa, invenienda sunt Latera reliqua. Nimirum pro reductione ad Eclipticam secundum Longitudinem Heliocentricam, sequens analogia sufficiet.

Ut Radius —— ——		10.000.000
	°. '. ''.	
Ad Co-sin. Ang.	21.18.30.	9.969.248
Ita Tangens — —	34.10.40.	9.831.890
Ad Tangentem —— ——		9.801.138=32°.19'.5''.

Pro Inclinatione sive Latitudine Heliocentrica sequens analogia est adhibenda.

Ut Radius —— ——		10.000.000
	°. '. ''.	
Ad Sin. ——	34.10.40.	9.749.553
Ita Sin. Ang. Dat.	21.18.30.	9.560.369
Ad Sin. Ang. Quæsit. ——		9.309.922=11°46.44''.

(6°) Ut Logarithmum veræ Cometæ à Sole Distantiæ obtineamus, Logarithmum *pro distantia à Sole* in Tabula generali motui medio congruum Logarithmo distantiæ minimæ, sive Periheliæ addere oportebit: *viz.* 0.255.369 + 0.011.044 = 0.266.413: & dein sequentem instituere analogiam.

Ut Radius — —	10.000.000
Ad Dist. à Sole --	0.266.413
Ita Co-sin. Inclin.	9.990.754
Ad Dist. Curt. --	0.257.167

Sive, quod eodem recidit, addendi sunt tres Logarithmi, & abjiciendus, Radii Logarithmus; uti fit in exemplis nostris. (7°) Ad Obtinendam Cometæ Longitudinem Geocentricam sive Locum Visum in Ecliptica, hac methodo utendum. Longitudinem Cometæ Heliocentricam 1ˢ. 18°. 54'. 55''. subtrahe à vero So-

lis

lis Loco in Ecliptica. 11ˢ. 21°. 44′. 45″. restabit *Angulus Commutationis* 10ˢ. 2°. 49′. 50″. Cujus ad circulum complementum est 1ˢ. 27°. 10′. 10″. sive graduum 57°. 10′. 10″. Hujus dimidium est 28°. 35′. 5″. Unde instituenda est hæc analogia.

Ut Dist. Telluris —	9.997.918				
Ad Dist. Com. Curtat.	10.257.167				
Ita Radius —— —	10.000.000		°	′	″
Ad Tangentem ——	10.259.249	=	61.	10.	3.
Rejectis vero gradibus 45 *rest.* ——			16.	10.	3. *Ergo*
Ut Radius —— ——	10.000.000				
Ad Tang. 16°. 10′. 3″.	9.462.265		°	′	″
Ita Tangens semisumma	9.736.294	=	28.	35.	5.
Ad Tang. semidifferentiæ	9.198.559	=	8.	58.	36.

Qua semidifferentia ex semisumma ablata, restant 19°. 36′. 29″. hoc est, *Orbis Parallaxis.* Hac autem Parallaxi à Loco Cometæ Heliocentrico hoc in casu subtracta, datur Locus ejusdem Geocentricus ♈. 29°. 18′. 26″. paulo accuratius, opinor, quam calculus Halleianus eundem exhibet. Quod si Cometæ Distantia à Sole Curtata minor sit distantia Telluris à Sole, uti fit in exemplorum altero, calculus est instituendus juxta morem pro Planetis inferioribus; (uti hic instituitur juxta morem pro superioribus.) Et semidifferentia angulorum, *elongationem à Sole* eo in casu exhibitura, Longitudini Solis in Ecliptica addenda est, vel ab eadem auferenda; ut Locum Cometæ Geocentricum habeamus.

(8°) Ad Latitudinem Cometæ Geocentricam definiendam hæc anologia est adhibenda. (Angulo Elongationis ex aggregato semisummarum conflato.)

	° ′ ″	
Ut Sinus Anguli Commutationis	57.10.10.	9.924.423
Ad Sinum Anguli Elongationis —	37.33.41.	9.785.053
Ita Tangens Inclinationis —— ——	11.46.44.	9.319.161
Ad Tangentem Latitudinis ——	(8.36.09)	9.179.791

 " Mo-

" Momento autem primi Exempli, *Londini* observa-
" tum est Cometam applicari ad Stellam secundam *A-*
" *rietis*; ita ut novem minutis illa borealior repertus sit,
" ac tribus minutis orientalior: Observante D^{no}. *Ro-*
" *berto Hookio*. In secundo autem Exemplo ipse, in
" vicinia *Londini*, instrumentis quibus olim Stellas Au-
" strales observaveram, Cometæ locum deprehendi ♋.
" 5°. 11'. ½, cum Latitudine Boreali, 28°. 52', con-
" sentiente ad amussim observatione *Grenovicensi* eodem
" pene momento facta.

" Cometa autem Anni 1680, qui pene Solem attigit,
" (non enim triente semidiametri corporis Solaris à su-
" perficie ejus distabat in Perihelio) cum Latus rectum
" exiguum admodum sit, Tabula Generali haud coer-
" ceri potuit, ob immanem Motus medii velocitatem:
" præstat itaque in hoc, postquam inventus fuerit Mo-
" tus medius, ex eodem, ope præcedentis æquationis
" $zzz + 3z = \frac{4}{100}$ *Mot. med.* Tangentem dimidii
" anguli à Perihelio elicere, una cum Logarithmo pro
" distantia à Sole. Quibus datis iisdem omnino regu-
" lis ac in cæteris procedendum est.

" Ad hunc itaque modum Astronomico Lectori exa-
" minare licet numeros à me positos, quos summa cura
" ex observationibus quæ suppetebant exantlavi; neque
" enim, antequam probe ad incudem redacti fuerint,
" ac multorum annorum studio quantum fieri possit po-
" liti, in publicum prodeunt. Hoc autem specimen
" Astronomiæ Cometicæ, futuri operis Prodromum,
" editum esse volui; ne forte superveniente fato peri-
" rent lucubrationes nostræ, ob Calculi difficultatem
" non cuivis homini denuo suscipiendæ. Monendus
" autem est Lector, quinque priores ordine Cometas,
" quorum tertius & quartus est à *Petro Apiano* obser-
" vatus, quintus vero à *Paulo Fabricio*, uti & decimus
" à *Mæstlino* (ni fallor) anno 1596 conspectus, non e-
" undem certitudinis gradum cum reliquis præ se ferre.
" Neque enim debitis organis nec cura ad hoc requisita

" ob-

" observationes ipsæ peractæ sunt; adeoque inter se
" dissidentes nullo modo cum computo regulari conci-
" liari possunt. Cometam anni 1684 unus videt *Blan-*
" *chinus* observator *Romanus*: ultimum vero Anni sc.
" 1698 *Parisienses* soli conspexerunt, ejusque cursum
" insolito modo designarunt. Obscurus hic admodum,
" etiamsi velox ac terris satis vicinus, nostros sane o-
" culos alioquin non incuriosos effugit. Insignes au-
" tem duos hac nostra ætate Cometas, alterum Anno
" 1689 Mense *Novembri* ortum, alterum Mense *Febru-*
" *ario* Anni 1702, Catalogo subjungere non licuit,
" propter defectum observationum. Etenim versus
" mundi plagas Australes cursum dirigentes, ac in *Eu-*
" *ropa* vix conspicui, contemplatores non habuere ne-
" gotio pares. Quod si forsan ex partibus *Indicis* ad-
" vectæ fuerint accuratæ observationum series ad hoc
" necessariæ; lubens calculum repetere, horumque Or-
" bitas, reliquorum ad modum, Numeris designandi
" laborem suscipere non gravabor.

" Quibus perpensis, ac collatis inter se cæteris ho-
" rum Cometarum motuum Elementis, videre est,
" nullo ordine dispositos esse Orbitas; neque ipsos,
" Planetarum more, Zodiaco comprehendi posse, qua-
" quaversum tam retrograde quam directe indifferen-
" ter latos; unde manifestum est eos motu verticali
" nullo modo circumagi. Quinetiam distantiæ Perihe-
" liæ nunc majores nunc minores reperiuntur; unde pro-
" num est suspicari etiam multo plures esse Cometas,
" qui in partibus à Sole remotioribus, obscuri cauda-
" que destituti, adeoque nobis inconspicui, præterlabi
" possunt.

" Hactenus Cometarum Orbes consideravimus ut
" perfecte Parabolicos; quo supposito consequeretur
" Cometas, vi Centripeta versus Solem impulsos, à
" spatiis infinite distantibus descendere, casuque suo ve-
" locitatem tantam acquirere, ut iterum in spatia Mundi
" remotissima sese abdere possent, perpetuo nisu sursum

" tendentes, ac ad Solem nunquam reverſuri. Cum au-
" tem ſatis frequentes ſint Cometarum adventus; ac
" eorum nullus reperiatur motu ferri Hyperbolico, ſeu
" velociore quam cadendo ad Solem acquirere debeat,
" credibile eſt potius in Orbibus valde Excentricis re-
" volvi eos circa Solem, ac poſt longiſſimas periodos
" reverti. Sic enim Numerus eorum præfinitus eſſet,
" ac fortaſſe non uſque adeo magnus. Spatia autem
" inter Solem Fixaſque tanta ſunt, ut Cometæ revol-
" venti cum Periodo quantumvis longa ſatis loci ſit.
" Latus autem rectum Ellipſis eſt ad Latus rectum Pa-
" rabolæ eandem Periheliam diſtantiam habentis, ut
" diſtantia Aphelia in Ellipſi eſt ad Axem totum Ellip-
" ſis; Velocitates autem ſunt in dimidiata ratione eo-
" rundem: quapropter in Orbibus valde Excentricis
" ratio hæc accedit proxime ad rationem æqualitatis.
" Tantilla autem differentia, quæ intercedit ratione ma-
" joris in Parabola velocitatis, facillime in ſitu Orbis de-
" terminando compenſatur. Hujus itaque Tabulæ Ele-
" mentorum Motuum uſus præcipuus eſt, atque etiam
" propter quem illam conſtruere operæ pretium duxi,
" ut, ſi quando novus Cometa emerſerit, poſſimus col-
" latis elementis dignoſcere an poterit eſſe aliquis ex an-
" tiquis, necne; ac proinde Periodum Orbitæque Axem
" determinare, reditumque prædicere. Ac ſane multa
" me ſuadent ut credam Cometam anni 1531 ab *Apiano*
" obſervatum, eundem fuiſſe cum illo qui anno 1607
" deſcriptus eſt à *Keplero* & *Longomontano*, quemque
" ipſe iterum reverſum vidi ac obſervavi anno 1682.
" Quadrant Elementa omnia, ac ſola inæqualitas pe-
" riodorum adverſari videtur: hæc autem tanta non
" eſt ut cauſis Phyſicis non poſſit attribui. *Saturni* enim
" motus à cæteris, præſertim *Jove*, ita interturbatur,
" ut per aliquot dies integros incertum ſit hujus Planetæ
" tempus Periodicum. Qanto magis talibus erroribus
" obnoxius erit Cometa, qui quatuor pene vicibus al-
" tius excurrit *Saturno*, cujuſque velocitas, vel tantil-

" lum

" lum aucta, Orbem ab Elliptico in Parabolicum pos-
" sit immutare? Confirmatur etiam eundem esse potu-
" isse ex eo, quod anni 1456 æstate, conspectus fuerit
" Cometa eodem pene modo inter Solem & Terram
" transiens retrograde: quem, licet à nemine observa-
" tus fuerit Astronomice, ex periodo modoque transi-
" tus non diversum à prædictis extitisse conjicio. Unde
" ausim ejusdem reditum fidenter prædicere, anno scil.
" 1758. Quod si hoc evenerit, nulla amplius erit du-
" bitandi causa, quin redire debeant cæteri. Habebunt
" ergo Astronomi in hac arenâ quo se exerceant per
" multa Secula, priusquam tot tantorumque Corporum
" circa commune centrum Solis revolventium numerus
" cognoscatur, ac motuum symptomata certis regulis
" coerceantur. Crediderim equidem Cometam etiam
" anni 1532, eundem fuisse cum illo, qui ab *Hevelio*
" observabatur ineunte anno 1661: sed observationes
" *Apiani*, quas solas de primo habemus, nimis rudes
" sunt, nec quicquam certi in re tam subtili ex iisdem
" elici potest. Justo volumine hæc omnia exequi mihi
" animus est, nec Astronomiæ promovendæ hac in re
" deero, si Deo O. M. visum fuerit vitam facultates-
" que prorogare. Interim quicunque modum Con-
" struendi Cometarum Orbes per tres observationes ac-
" curate habitas addiscere cupit, sub finem libri de Sy-
" stemate Mundi, sive tertii *Philosophiæ Nat. Princip.*
" *Math.* magni ipsius Inventoris methodum inveniet:
" Quam postea Dignissimus Collega meus *D. Gregorius*,
" Lib. V. pereruditæ Astronomiæ suæ Physicæ & Geo-
" metricæ plene & luculenter illustravit.

" Unicum autem non abs re erit nec injucundum,
" hic loci Lectorem monere Astronomum; nempe
" quod nonnulli ex his Cometis Nodos suos habeant
" adeo Orbi Terræ annuo vicinos, ut si forte accide-
" rit, tempore reditus Cometæ *Terram* occupare Loca
" in orbe suo Nodo proxima, dum Cometa incredibili
" cum Velocitate prætererit, Parallaxin etiam habitu-

" rus sit valde observabilem, quæque fuerit ad Solis
" parallaxin in ratione data. Unde occasione talium
" transituum oblata erit ansa, rara quidem sed optima,
" determinandi Solis à *Terra* distantiam; quam hacte-
" nus non nisi mediante parallaxi *Martis* Acronychii,
" vel *Veneris* perigææ, triplo quidem solari majore, sed
" quæ vix ullis instrumentis sentiatur, laxe admodum
" concludere licuit. Quem Cometarum usum sug-
" gessit Clarissimus Geometra Dˢ. *Nic. Facio*. Cometa
" etenim anni 1472 parallaxin habuit plusquam vigesies
" Solari majorem. Ac si Cometa anni 1618 appulis-
" set, juxta medium Mensis *Martii*, ad Nodum ejus
" Descendentem; vel si Cometa anni 1684 paulo ci-
" tius ad Nodum Ascendentem pervenisset, profecto
" Terris admodum propinqui etiam adhuc magis nota-
" biles habuissent parallaxes: Inter omnes vero nullus
" propiore appulsu Terris minatus est quam ille anni
" 1680: Hic initio Calculo non amplius ad Boream
" distabat ab Orbe nostro annuo, quam semidiametro
" solari (sive Radio Lunaris Orbitæ uti existimo) id-
" que Novemb. 11°. 1^h. 6'. P. M. Quo tempore, si
" Terræ quoad Longitudinem conjunctus fuisset, pa-
" rallaxis sane Lunari æqualis in Cometæ motu obser-
" vari potuisset. Hæc Astronomis dicta sunto. Quæ
" vero ab hujusmodi allapsu, vel contactu vel denique
" collisione Corporum cœlestium (quæ quidem om-
" omnino non impossibilis est) consequi debeant, re-
" rum Physicarum studiosis discutienda relinquo.

Come-

Cometarum omnium hactenus rite Observatorum, Motuum in Orbe Parabolico Elementa Astronomica.

Com. An.	Nodus Ascend.	Inclin. Orbitæ.	Perihelion.	Distan. Perihel. à Sole.	Log. Dist. Perihelia à Sole.	Temp. æquat. Perihelii.	Perihelion à Nodo.	
	gr. ′. ″	gr. ′. ″	gr. ′. ″			d. h. ′.	gr. ′. ″	
1337	♊ 24.21. 0	32.11. 0	♉ 5.79. 0	40666	9.609236	*Jun.* 2. 6.25	46.22. 0	Retrog.
1472	♑ 11.46.20	5.20. 0	♉ 15.33.30	54273	9.734584	*Feb.* 28.22.23	123.47.10	Retrog.
1531	♉ 19.25. 0	17.56. 0	♒ 1.39. 0	56700	9.753583	*Aug.* 24.21.18½	107.46. 0	Retrog.
1532	♊ 20.27. 0	32.36. 0	♋ 21. 7. 0	50910	9.706803	*Octob.* 19.22.12	30.40. 0	Direct.
1556	♍ 25.42. 0	32. 6.30	♑ 8.50. 0	46390	9.666424	*April* 21.20. 3	103. 8. 0	Direct.
1577	♈ 25.52. 0	74.32.45	♌ 9.22. 0	18342	9.263447	*Octob.* 26.18.45	103.30. 0	Retrog.
1580	♈ 18.57.20	64.40. 0	♋ 19. 5.50	59628	9.775450	*Nov.* 28.15.00	90. 8.30	Direct.
1585	♉ 7.42.30	6. 4. 0	♈ 8.51. 0	109358	0.038850	*Sept.* 27.19.20	28.51.30	Direct.
1590	♍ 15.30.40	29.40.40	♏ 6.54.30	57661	9.760882	*Jan.* 29. 3.45	51.23.50	Retrog.
1596	♒ 12.12.30	55.12. 0	♏ 18.16. 0	51293	9.710058	*Jul.* 31.19.55	83.56.30	Retrog.
1607	♉ 20.21. 0	17. 2. 0	♒ 2.16. 0	58680	9.768490	*Octob.* 16. 3.50	108.05. 0	Retrog.
1618	♊ 16. 1. 0	37.34. 0	♈ 2.14. 0	37975	9.579498	*Octob.* 29.12.23	73.47. 0	Direct.
1652	♊ 28.10. 0	79.28. 0	♈ 28.18.40	84750	9.928140	*Nov.* 2.15.40	59.51.20	Direct.
1661	♊ 22.30.30	32.35.50	♋ 25.58.40	44851	9.651772	*Jan.* 16.23.41	33.28.10	Direct.
1664	♊ 21.14. 0	21.18.30	♌ 10.41.25	102575½	0.011044	*Nov.* 24.11.52	49.27.25	Retrog.
1665	♏ 18.02. 0	76.05. 0	♊ 11.54.30	10649	9.027309	*April* 14. 5.15½	156. 7.30	Retrog.
1672	♑ 27.30.30	83.22.10	♉ 16.59.30	69739	9.843476	*Feb.* 20. 8.37	09.29. 0	Direct.
1677	♏ 26.49.10	79.03.15	♌ 17.37. 5	28059	9.448072	*April* 26.00.37½	99.12. 5	Retrog.
1680	♑ 2. 2. 0	60.56. 0	♐ 22.39.30	00612½	7.787106	*Dec.* 8.00. 6	19.22.30	Direct.
1682	♉ 21.16.30	17.56. 0	♒ 2.52.45	58328	9.765877	*Sept.* 4.07.39	108.23.45	Retrog.
1683	♍ 23.23. 0	83.11. 0	♊ 25.29.30	56020	9.748343	*Jul.* 3. 2.50	87.53.30	Retrog.
1684	♐ 28.15. 0	65.48.40	♏ 28.52. 0	96015	9.982339	*Maii* 29.10.16	29.23.00	Direct.
1686	♓ 20.34.40	31.21.40	♊ 17.00.30	32500	9.511883	*Sept.* 6.14.33	86.25.50	Direct.
1698	♐ 27.44.15	11.46. 0	♑ 00.51.15	69129	9.839660	*Octob.* 8.16.57	3. 7. 0	Retrog.

Hæc Tabula vix indiget explicatione, cum ex Titulis satis pateat quid sibi velint Numeri. Distantiæ autem Periheliæ æstimantur in ejusmodi partibus quales media distantia Terræ a Sole habet centies millenas.

Tabula Generalis pro supputando motu Cometarum in Orbe Parabolico.

Med. mot.	Ang. à perihelio.	Logar. pro dist. à Sole.	Med. mot.	Ang. à perihelio.	Logar. pro dist. à Sole.
o	gr. ′. ″.		o	gr. ′. ″.	
1	1.31.40	0.000077	31	42.55.06	0.062400
2	3. 3.15	0.000309	32	44. 3.20	0.065838
3	4.34.43	0.000694	33	45.10.29	0.069319
4	6. 6. 0	0.001231	34	46.16.35	0.072839
5	7.37. 1	0.001921	35	47.21.36	0.076396
6	9. 7.43	0.002759	36	48.25.33	0.079984
7	10.38. 2	0.003745	37	49.28.27	0.083600
8	12. 7.54	0.004876	38	50.30.19	0.087244
9	13.37.17	0.006151	39	51.31. 8	0.090910
10	15. 6. 7	0.007564	40	52.30.56	0.094596
11	16.34.20	0.009115	41	53.29.44	0.098300
12	18. 1.54	0.010798	42	54.27.32	0.102019
13	19.28.47	0.012609	43	55.24.21	0.105752
14	20.54.54	0.014550	44	56.20.12	0.109490
15	22.20.14	0.016607	45	57.15. 6	0.113240
16	23.44.44	0.018783	46	58. 9. 3	0.116995
17	25. 8.22	0.021072	47	59. 2. 4	0.120756
18	26.31. 8	0.023470	48	59.54.11	0.124518
19	27.52.55	0.025969	49	60.45.25	0.128278
20	29.13.47	0.028570	50	61.35.45	0.132035
21	30.33.40	0.031263	51	62.25.14	0.135792
22	31.52.32	0.034045	52	63.13.52	0.139544
23	33.10.23	0.036916	53	64. 1.40	0.143291
24	34.27.12	0.039864	54	64.48.38	0.147029
25	35.42.59	0.042892	55	65.34.50	0.150762
26	36.57.41	0.045989	56	66.20.13	0.154482
27	38.11.20	0.049154	57	67.04.50	0.158192
28	39.23.54	0.052382	58	67.48.22	0.161890
29	40.35.23	0.055668	59	68.31.50	0.165578
30	41.45.47	0.059009	60	69.14.16	0.169254

Tabula Generalis pro Supputando.

Med. mot.	*Angul. à peribelio.*	*Logar. pro dist. à Sole.*	*Med. mot.*	*Ang. à peri-belio.*	*Logar. pro dist. à Sole.*
o	gr. '. ".		o	gr. '. ".	
61	69.55.58	0.172914	91	86.20.34	0.274176
62	70.36.56	0.176557	92	86.46.20	0.277239
63	71.17.16	0.180188	93	87.11.43	0.280284
64	71.56.56	0.183803	94	87.36.45	0.283306
65	72.35.57	0.187404	95	88.01.27	0.286308
66	73.14.15	0.190978	96	88.25.49	0.289293
67	73.51.59	0.194540	97	88.49.48	0.292252
68	74.29. 6	0.198085	98	89.13.32	0.295201
69	75.05.38	0.201614	99	89.36.54	0.298122
70	75.41.35	0.205122	100	90.00.00	0.301030
71	76.16.56	0.208612	102	90.45.14	0.306782
72	76.51.43	0.212080	104	91.29.18	0.312469
73	77.25.57	0.215529	106	92.12.14	0.318060
74	77.59.41	0.218963	108	92.54. 4	0.323587
75	78.32.54	0.222378	110	93.34.52	0.329042
76	79. 5.35	0.225769	112	94.14.40	0.334424
77	79.37.45	0.229142	114	94.53.30	0.339736
78	80. 9.23	0.232488	116	95.31.22	0.344979
79	80.40.34	0.235809	118	96. 8.22	0.350153
80	81.11.16	0.239127	120	96.44.30	0.355262
81	81.41.31	0.242416	122	97.19.48	0.360306
82	82.11.19	0.245684	124	97.54.17	0.365284
83	82.40.40	0.248933	126	98.28.00	0.370200
84	83. 9.34	0.252159	128	99.00.57	0.375052
85	83.38. 4	0.255366	130	99.33.11	0.379842
86	84. 6. 8	0.258552	132	100. 4.43	0.384576
87	84.33.49	0.261720	134	100.35.45	0.389252
88	85. 1. 5	0.264865	136	101. 5.48	0.393868
89	85.27.58	0.267989	138	101.35.22	0.398428
90	85.54.27	0.271092	140	102. 4.19	0.402930

Motu Cometarum in Orbe Parabolico.

Med. mot.	Ang. à perihelio.	Logar. pro dist. à Sole.	Med. mot.	Ang. à perihelio.	Logar. pro dist. à Sole.
o	gr. '. ''.		o	gr. '. ''.	
142	102.32.41	0.407380	204	113.37.25	0.523406
144	103.00.31	0.411784	208	114. 9.52	0.529705
146	103.27.47	0.416132	212	114.41.23	0.535886
148	103.54.31	0.420430	216	114.12.02	0.541958
150	104.20.43	0.424676	220	115.41.51	0.547922
152	104.46.22	0.428866	224	116.10.52	0.553781
154	105.11.33	0.433012	228	116.39. 7	0.559538
156	105.36.16	0.437110	232	117. 6.38	0.565199
158	106.00.32	0.441164	236	117.33.27	0.570762
160	106.24.23	0.445178	240	117.59.35	0.576233
162	106.47.47	0.449144	244	118.25. 5	0.581616
164	107.10.44	0.453060	248	118.49.57	0.586912
166	107.33.17	0.456936	252	119.14.14	0.592122
168	107.55.27	0.460772	256	119.37.56	0.597252
170	108.17.14	0.564208	260	120. 1. 6	0.602301
172	108.38.37	0.468318	264	120.23.44	0.607274
174	108.59.39	0.472030	268	120.45.52	0.612174
176	109.20.20	0.475705	272	121. 7.30	0.616998
178	109.40.40	0.479340	276	121.28.39	0.621750
180	110.00.40	0.482937	280	121.49.22	0.626438
182	110.20.20	0.486498	284	122. 9.38	0.631056
184	110.39.41	0.490022	288	122.29.28	0.635608
186	110.58.44	0.493512	292	122.48.54	0.640098
188	111.17.28	0.496965	296	123. 7.57	0.644525
190	111.35.55	0.500384	300	123.26.36	0.648893
192	111.54.05	0.503769	310	124.11.40	0.659559
194	112.11.58	0.507121	320	124.54.36	0.669880
196	112.29.34	0.510441	330	125.35.34	0.679876
198	112.46.55	0.513729	340	126.14.44	0.689568
200	113. 4.00	0.516984	350	126.52.12	0.698970

Med. mot.	*Ang. à perihelio.*	*Logar. pro dist. à Sole.*	*Med. mot.*	*Ang. à perihelio.*	*Logar. pro dist. à Sole.*
o	gr. '. ''.		o	gr. '. ''.	
360	127.28. 6	0.708104	820	141.49.24	0.970836
370	128. 2.33	0.716976	840	142.10.00	0.978397
380	128.35.38	0.725606	860	142.29.56	0.985771
390	129. 7.27	0.734006	880	142.49.10	0.992970
400	129.38. 4	0.742186	900	143. 7.48	1.000000
410	130. 7.34	0.750160	920	143.25.51	1.006871
420	130.36. 2	0.757930	940	143.43.21	1.013586
430	131. 3.30	0.765516	960	144.00.18	1.020155
440	131.30. 2	0.772918	980	144.16.46	1.026583
450	131.55.41	0.780148	1000	144.32.46	1.032876
460	132.20.30	0.787216	1500	149.26. 8	1.158188
470	132.44.32	0.794122	2000	152.26.15	1.246058
480	133. 7.50	0.800882	2500	154.32.26	1.313703
490	133.30.25	0.807494	3000	156. 7.27	1.368678
500	133.52.20	0.813969	3500	157.22.49	1.414974
520	134.34.18	0.826522	4000	158.24.36	1.454950
540	135.14. 0	0.838600	4500	159.16.36	1.490125
560	135.51.28	0.850187	5000	160. 1.12	1.521521
580	136.27. 6	0.861369	5500	160.40. 5	1.549874
600	137.00.57	0.872155	6000	161.14.24	1.575718
620	137.33.13	0.882575	6500	161.45.00	1.599440
640	138. 3.58	0.892649	7000	162.12.34	1.621417
660	138.33.21	0.902401	7500	162.37.34	1.641838
680	139. 1.29	0.911866	8000	163.00.23	1.660922
700	139.28.25	0.921012	8500	163.21.2[illegible]	1.678834
720	139.54.16	0.929907	9000	163.40.42	1.695708
740	140.19. 5	0.938549	9500	163.58.38	1.711662
760	140.42.56	0.946951	10000	164.15.20	1.726784
780	141.05.55	0.955124	50000	170.52. 0	2.197960
800	141.28. 3	0.963082	100000	172.45.44	2.399655

[Post pag. 339. *Astronom. nostr. desideratur hac Tabula.*]

Tabula Logarithmorum Distantiarum Terræ à Sole.

Anomalia Terræ Media.

0	Sign. 0.	Sign. 1.	Sign. 2.	Sign. 3.	Sign. 4.	Sign. 5.	0
0	5.007284	5.006375	5.003778	5.000128	4.996381	4.993588	30
1	5.007286	5.006313	5.003669	4.999999	4.996267	4.993522	29
2	5.007284	5.006249	5.003559	4.999870	4.996154	4.993459	28
3	5.007280	5.006184	5.003447	4.999740	4.996042	4.993398	27
4	5.007273	5.006117	5.003334	4.999611	4.995931	4.993339	26
5	5.007264	5.006048	5.003220	4.999482	4.995822	4.993282	25
6	5.007253	5.005977	5.003105	4.999352	4.995714	4.993226	24
7	5.007240	5.005004	5.002989	4.999223	4.995607	4.993173	23
8	5.007225	5.005829	5.002872	4.999094	4.905501	4.993122	22
9	5.007208	5.005753	5.002755	4.998965	4.995397	4.993074	21
10	5.007189	5.005675	5.002636	4.998837	4.995294	4.993028	20
11	5.007167	5.005595	5.002516	4.998702	4.995193	4.992984	19
12	5.007144	5.005513	5.002396	4.998581	4.995094	4.992942	18
13	5.007119	5.005430	5.002275	4.998454	4.994996	4.992903	17
14	5.007092	5.005345	5.002153	4.998327	4.994899	4.992866	16
15	5.007062	5.005258	5.002030	4.998200	4.994804	4.992831	15
16	5.007030	5.065170	5.001907	4.998074	4.994711	4.992798	14
17	5.006997	5.005080	5.001787	4.997948	4.994619	4.992768	13
18	5.006961	5.004988	5.001659	4.997823	4.994529	4.992740	12
19	5.006923	5.004885	5.001534	4.997698	4.994441	4.992714	11
20	5.006883	5.004801	5.001408	4.997574	4.994354	4.992691	10
21	5.006842	5.004705	5.001282	4.997451	4.994269	4.992670	9
22	5.006798	5.004607	5.001155	4.997329	4.994186	4.992652	8
23	5.006752	5.004508	5.001028	4.997207	4.994105	4.992636	7
24	5.006704	5.004408	5.000900	4.997086	4.994025	4.992622	6
25	5.006654	5.004306	5.000772	4.996966	4.993947	4.992611	5
26	5.006602	5.004203	5.000644	4.996847	4.993871	4.992602	4
27	5.006548	5.004099	5.000515	4.996729	4.993798	4.992595	3
28	5.006492	5.003983	5.000384	4.996612	4.993726	4.992591	2
29	5.006434	5.003886	5.000257	4.996496	4.993656	4.992589	1
30	5.006375	5.003778	5.000128	4.996381	4.993588	4.992588	0
0	Sign. 11.	Sign. 10.	Sign. 9.	Sign. 8.	Sign. 7.	Sign. 6.	

[*Ad pag.* 332. *Astron. Nostræ desiderantur hæ Tabellæ.*]

Annis Christ. Curr.	*Praeces. Æquin.* s.	o.	'.	''.	*Mensibus Anni Commun.*	s.	o.	'.	''.
1	0.	5.	19.	20	*Jan.*	0.	0.	0.	0
1501	0.	26.	9.	20	*Feb.*	0.	0.	0.	4
1581	0.	27.	16.	0	*Mart.*	0.	0.	0.	8
1601	0.	27.	32.	40	*April*	0.	0.	0.	12
1621	0.	27.	49.	20	*Mai.*	0.	0.	0.	16
1641	0.	28.	6.	0	*Jun.*	0.	0.	0.	21
1661	0.	28.	22.	40	*Jul.*	0.	0.	0.	25
1681	0.	28.	39.	20	*Aug.*	0.	0.	0.	29
1701	0.	28.	56.	0	*Sept.*	0.	0.	0.	33
1721	0.	29.	12.	40	*Octob.*	0.	0.	0.	38
1741	0.	29.	29.	20	*Nov.*	0.	0.	0.	42
1761	0.	29.	46.	0	*Decem.*	0.	0.	0.	46
1781	0.	30.	2.	40					
1801	0.	30.	19.	20					
1901	0.	31.	42.	40					
2001	0.	33.	6.	0					

Pro Annis Expansis adi Col. 3. *pag.* 333.

FINIS.

CORRIGENDA.

PAG. 47. Lin. 30. 31. Lege $29\frac{1}{10}$ bis. & dele $14\frac{2}{3}$ ad 1 bis. Pag. 53. Lin. Ult. *Nota quod ablato* 4 *de* 6 *restant* 2 *positive; unde pergit corpus primum post occursum; & inde motus secundi additione obtinetur,* $10 + 2 = 12$. *Ubi vero restat nihil corpus primum quiescet. Ubi residuum est minus nihilo, sive quantitas negativa corpus primum regredietur, & motus secundi subtractione obtinebitur.* Pag. 304. Lin. 8. *Leg. Ut* 1 *ad* 8. *circiter Lin.* 9. *Leg. ut* 9 *ad* 8. *circiter.* Pag. 351. Lin. 12, 13. *Leg. Numerorum pro ipsis distantiis, unitate pro distantia minima ubique accepta. licet unitas ista sit valoris, diversi, pro diversis distantiis periheliis in priori Elementorum Tabula distincte per Logarithmos consignatis.*

Catalogus Librorum Impensis Benj. Took.

ARITHMETICA UNIVERSALIS sive de Compositione & Resolutione Arithmetica Liber. Cui accessit Halleiana Æquationum Radices Arithmetice inveniendi methodus. In Usum Juventutis Academicæ.

PRÆLECTIONES ASTRONOMICÆ Cantabrigiæ in Scholis Publicis Habitæ à GULIELMO WHISTON, A. M. & Matheseos Professore Lucasiano. Quibus Accedunt Tabulæ Plurimæ Astronomicæ Flamstedianæ Correctæ, Halleianæ, Cassinianæ, & Streetianæ. In Usum Juventutis Academicæ.

TELLURIS *Theoria Sacra:* Orbis Nostri Originem & Mutationes Generales, quas aut jam subiit, aut olim subiturus est, Complectens. Libri duo Priores de Diluvio & Paradiso. Editio Tertia, recognita & contracta. Authore T. BURNETIO.

A NEW *Theory of the Earth,* from its Original, to the Consumation of all Things: Wherein the Creation of the World in Six Days, the Universal Deluge, and the General Conflagration, *as laid down in the Holy Scriptures,* are shewn to be perfectly agreeable to Reason and Philosophy. With a large Introductory Discourse concerning the Genuine Nature, Stile, and Extent of the *Mosaick* History of the Creation. The *Second Edition,* with great Additions, Improvements and Corrections. By WILLIAM WHISTON, M. A. Professor of the *Mathematicks* in the University of *Cambridge.*

